Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методический комплекс

В трех частях

Часть 1

Функции действительной переменной. Ряды

Гомель 2008

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук,

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.

Д 332 Математический анализ : учебно - методический комплекс для студентов физического факультета: Ч.1 Функции действительной переменной. Ряды / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образ. РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 329 с.

Первая часть учебно-методического комплекса посвящена теории пределов, дифференциальному и интегральному исчислению функции одной переменной, а также теории рядов, которые излагаются в первом семестре на физическом факультете. Для студентов и преподавателей физических факультетов ВУЗов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

Содержание

Введение

Учебно-методический комплекс «Математический анализ» написан в соответствии с действующей программой по данной дисциплине для физических специальностей.

Данный комплекс представлен тремя частями: «Функции действительной переменной. Ряды», «Функции многих переменных», «Функции комплексной переменной». В первую часть входят разделы теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функции действительной переменной, числовые и функциональные ряды, которые излагаются в 1-м семестре. Во второй части представлены разделы 2-го семестра: непрерывность и дифференцируемость функции многих переменных, криволинейные, кратные и поверхностные интегралы; векторный анализ; интегралы, зависящие от параметра. Третья часть содержит материал 3-го семестра: ряды и интеграл Фурье, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость функции комплексной переменной, вычеты и их приложения, операционное исчисление.

Структура каждой части содержит требования образовательного стандарта, учебную программу, тематический план. По изучаемым разделам математического анализа приводится краткий лекционный курс, материал которого разбит на части, соответствующие темам. Каждая тема содержит перечень вопросов, подлежащих изучению, основные определения, утверждения и теоремы (доказательства теорем излагаются в литературе, приведенной в пособии). В конце каждого раздела краткого лекционного курса предлагаются вопросы для самоконтроля, которые могут быть использованы студентами при самоподготовке по дисциплине, а также преподавателями при проведении устных опросов и математических диктантов. В пособии по каждому разделу приводятся примерные задания к практическим занятиям с решениями типовых примеров. Для осуществления контроля знаний предлагаются примерные задания контрольных работ по каждому разделу, тестовые задания итогового контроля, примерный перечень вопросов к экзамену и типовые задачи к нему. Нумерация таблиц и рисунков дана самостоятельно в каждом разделе; нумерация заданий к практическим занятиям своя в каждой теме.

При написании комплекса авторы использовали литературу, список которой приводится в конце каждой части комплекса.

Учебно-методический комплекс по курсу «Математический анализ» предназначен, с одной стороны, для организации учебно-го процесса дневного отделения физического факультета по специальности: 1-31 04 03 – Физическая электроника, а также может быть использован в качестве учебно-методического обеспечения для специальностей 1-31 04 01 02 – Физика (производственная деятельность), 1-31 04 01 03 – Физика (научно-педагогическая деятельность), 1-31 04 01 04 – Физика (управленческая деятельность), 1-02 05 04 04 – Физика. Техническое творчество. С другой стороны, изложенные вопросы разделов математического анализа, позволяют студентам использовать методы математического анализа в решении задач из различных областей математики и физики.

Требования
образовательного стандарта
(руководящий документ Республики Беларусь
РД РБ 021005.038–98)
Высшее образование
специальности 1-31 04 03 – Физическая электроника,

Дисциплина «Математический анализ»

Числовые последовательности. Основные теоремы о пределах последовательностей. Предельные точки последовательности. Общий критерий сходимости. Предел функции. Критерий Коши существования предела функции. Непрерывность функции. Точки разрыва. Замечательные пределы. Производная. Основные правила и формулы дифференцирования. Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков. Неопределенный интеграл. Основные методы и формулы интегрирования. Основные теоремы о непрерывных функциях. Основная теорема о неопределенном интеграле. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Функция нескольких переменных. Частные производные. Дифференцируемость сложной функции. Производная по направлению. Градиент. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Неявные функции. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимости. Функциональные ряды. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов. Несобственные интегралы и признаки сходимости. Эйлеровы интегралы. Двойной интеграл и его основные свойства. Тройные и n-кратные интегралы. Несобственные кратные интегралы. Криволинейные интегралы. Интегралы на поверхности. Интегралы, зависящие от параметра. Ряд Фурье по ортогональной системе элементов гильбертова пространства. Неравенство Бесселя. Комплексная форма ряда Фурье. Понятие о кратных рядах Фурье. Интеграл Фурье и его комплексная форма. Комплексная переменная. Функция комплексной переменной. Аналитические функции. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряд Лорана.

Требования к знаниям и умениям:

иметь представление: о месте и роли математики в системе естественнонаучного знания; о математике как особом способе познания мира; о содержании основных разделов высшей математики, об отличии прикладной математики от фундаментальной;

знать и уметь использовать: методы математического анализа;

владеть: дифференцированием и интегрированием функций.

Учебная программа курса «математический анализ»

Цели и задачи курса

Курс «Математический анализ» представляет собой совокупность фундаментальных разделов математики: действительный и комплексный анализ.

Целью курса «Математический анализ» является формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков по теории множеств, теории пределов, дифференциального и интегрального исчислений функций одной м многих переменных, теории рядов, элементам векторного анализа, теории функций комплексной переменной и операционного исчисления.

Основной задачей курса «Математический анализ» является реализация требований установленных образовательным стандартом Высшего образования к подготовке специалистов в области естественно-научных дисциплин.

Задачами курса являются изучение*:* языка теории множеств; последовательностей и функций посредством предельного перехода; аппарата дифференциального и интегрального исчислений для функций одной и многих действительных переменных; числовых и функциональных рядов, рядов Фурье; элементов векторного анализа; функций комплексной переменной; операционного исчисления.

Содержание курса “Математический анализ” определяет совокупность необходимых знаний, навыков и умений, которыми должен овладеть студент в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования РБ.

По завершении обучения по курсу «Математический анализ» студент обязан:

– *иметь представление:* о месте и роли математики в системе естественнонаучного знания; о содержании основных разделов высшей математики, об отличии прикладной математики от фундаментальной;

– *знать:* основные понятия и теоретические положения;

– *уметь*: применять изучаемые теоретические сведения для решения задач;

– *иметь навыки:* решения типовых задач.

Данный курс отличается глубокими внутренними связями и поэтому имеет высокую степень автономности. При этом он тесно связан с дисциплинами «Аналитическая геометрия», «Алгебра», «Дифференциальный уравнения». Теоретические основы и практические навыки широко используются во многих других математических теориях и учебных дисциплинах.

Содержание курса (1 семестр)

Раздел 1 Числовые множества

Тема 1 Множества

Язык теории множеств. Логические символы. Операции над множествами. Эквивалентность множеств. Множество натуральных чисел. Множество целых чисел. Множество рациональных чисел. Множество действительных чисел. Принцип Архимеда.

Тема 2 Грани числовых множеств

Ограниченные и неограниченные множества. Наибольший и наименьший элементы. Верхняя и нижняя грани. Точная верхняя и точная нижняя грани. Существование точной верхней (нижней) грани. Метод математической индукции. Принцип вложенных отрезков. Бином Ньютона.

Тема 3 Множество комплексных чисел

Понятие комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах комплексного числа.

Раздел 2 Теория пределов

Тема 1 Числовые последовательности

Определение числовой последовательности. Арифметические действия над последовательностями. Ограниченные и неограниченные последовательности. Монотонные последовательности. Бесконечно малые последовательности их свойства. Бесконечно большие последовательности.

Тема 2 Предел последовательности

Определение предела числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Арифметические свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Критерий Коши сходимости последовательности. Определение монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число e. Подпоследовательности. Принцип выбора. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Тема 3 Предел функции

Понятие функции. Способы задания функции. Основные свойства функций. Сложная функция. Обратная функция. Основные числовые функции. Классификация функций. Основные функции, заданные параметрическими уравнениям. Полярная система координат. Основные линии, заданные в полярной системе координат. Определение предела функции по Гейне и по Коши. Эквивалентность этих определений. Свойства предела функции. Односторонние пределы функции. Конечный предел функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Бесконечные пределы функции при $x \to x_0$. Бесконечный предел функций при $x \to \pm\infty$. Критерий Коши существования предела

Тема 4 Бесконечно малые функции

Определение бесконечно малой функции. Свойства бесконечно малых функций. Сравнение асимптотического поведения функций. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.

Тема 5 Непрерывность функции

Определение непрерывности функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Точки разрыва и их классификация. Непрерывность монотонной функции. Непрерывность сложной функции. Непрерывность обратной функции.Теорема об устойчивости знака непрерывной функции. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение. Теоремы Больцано-Коши. Ограниченность непрерывных функций. Первая теорема Вейерштрасса. Достижение непрерывной функцией своих точных граней. Вторая теорема Вейерштрасса. Определение равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора.

Раздел 3 Дифференциальное исчисление функции действительной переменной

Тема 1 Определение производной

Определение производной. Правая и левая производная. Дифференцируемость функции. Дифференциал. Геометрический смысл производной дифференциала. Уравнение касательной и нормали. Физический смысл производной и дифференциала. Свойства производных, связанные с арифметическими операциями.

Тема 2 Производная обратной и сложной функции

Производная обратной функции. Производная и дифференциал сложной функции. Логарифмическая производная. Инвариантность формы первого дифференциала. Таблица производных.

Тема 3 Производные и дифференциалы высших порядков

Производная функции, заданной параметрическими уравнениями. Производная неявной функции. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциалы высших порядков.

Тема 4 Теоремы о среднем.. Правило Лопиталя

Теорема Ферма. Теорема Роля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Другие виды неопределенностей и их раскрытие.

Тема 5 Формула Тейлора

Определение многочлена Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа. Формула Тейлора с остаточным членом в виде Пеано. Примеры разложения функций по формуле Тейлора. Формула Маклорена. Разложение по формуле Маклорена элементарных функций. Использование формулы Тейлора для выделения главной части функции для вычисления пределов. Использование формулы Тейлора для вычисления приближенных значений функции.

Тема 6 Локальные и глобальные экстремумы функции

Признаки монотонности функции. Точки локального экстремума функции. Необходимое условие существования локального экстремума функции. Точка возврата. Угловая точка. Стационарные точки. Достаточное условие существования локального экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Тема 7 Исследование функций

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба. Необходимое условие точки перегиба. Достаточное условие точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции. Исследование функции, заданных: а) параметрическими уравнениями; б) неявно; в) в полярных координатах.

Тема 8 Векторные функции

Определение векторной функции. Годограф. Радиус-вектор. Предел и непрерывность векторной функции. Производная и дифференциал векторной функции. Свойства дифференцируемых функций. Геометрический и механический смысл производной. Понятие кривой. Носитель кривой. Способы задания кривой. Ориентированная кривая. Точа самопересечения. Замкнутая кривая. Простой замкнутый контур. Касательная к кривой. Определение длины кривой. Гладкие и кусочно-гладкие кривые. Натуральное уравнение гладкой кривой. Уравнение нормальной плоскости. Единичный вектор касательной.

Тема 9 Кривизна кривой

Определение кривизны кривой. Вычисление кривизны кривой. Главная нормаль. Радиус, круг и координаты центра кривизны плоской кривой. Эволюта Ии эвольвента плоской кривой. Соприкасающаяся плоскость. Трехгранник Френе.

Раздел 4 Интегральное исчисление функции действительной переменной

Тема 1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение первообразной функции и ее свойства. Неопределенный интеграл и его геометрический смысл. Дифференцирование неопределенного интеграла. Линейность неопределенного интеграла. Инвариантность формул интегрирования. Таблица неопределенных интегралов.

Тема 2 Общие методы интегрирования

Непосредственное интегрирование. Интегрирование заменой переменной. Подведение множителя под знак дифференциала. Метод интегрирования по частям. Некоторые особенности использования метода интегрирования по частям.

Тема 3 Интегрирование рациональных функций

Рациональные дроби. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби. Метод неопределенных коэффициентов. Метод частных значений. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных дробей.

Тема 4 Интегрирование некоторых иррациональностей

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$ ($m_1, n_1, m_2, \ldots \in \square$). Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$ (m_1, n_1, m_2, $n_2, \ldots \in \square$). Интегралы вида $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ($m, n, p \in \square$, a, $b \in \square$). Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

Тема 5 Интегрирование трансцендентных функций

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ($m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$). Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$). Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Интегралы вида $\int R(\mathrm{e}^x)dx$. Интегралы от гиперболических функций.

Тема 6 Определенный интеграл

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости функций. Верхние и нижние суммы Дарбу. Верхние и нижние интегралы. Критерий интегрируемости Дарбу. Основные свойства определенного интеграла. Оценки интеграла. Теорема о среднем. Дифференцируемость интеграла по переменному верхнему пределу. Существование первообразной. Формула Ньютона-Лейбница. Формула замены переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Тема 7 Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей криволинейных трапеций. Вычисление длины кривой. Вычисление площади поверхности. Вычисление объемов пространственных тел. Вычисление площади и объема поверхности вращения.

Тема 8 Физические приложения определенного интеграла

Вычисление работы переменной силы; работы электродвигателя переменной мощности; вычисление силы давления; вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской кривой; вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры.

Тема 9 Несобственные интегралы

Несобственные интеграл с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интеграл от неограниченной функции. Формулы для несобственных интегралов. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Интегралы от неотрицательных функций. Признаки сравнения несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Метод средних прямоугольников. Метод трапеций. Метод Симпсона.

Раздел 5 Теория рядов

Тема 1 Ряды с неотрицательными членами

Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Простейшие свойства числовых рядов. Линейные операции над сходящимися рядами. Критерий Коши сходимости числового ряда. Ряда с неотрицательными членами. Гармонический ряд. Ряд Дирихле. Интегральный признак Коши. Признаки сравнения. Признак Даламбера. Признак Коши.

Тема 2 Знакопеременные ряды

Определение знакочередующегося ряда. Признак Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды. Определение знакопеременного числового ряда. Условно сходящиеся ряды. Признаки сходимости Дирихле и Абеля знакопеременных рядов.

Тема 3 Функциональные ряды

Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Функциональные ряды. Поточечная сходимость функциональных рядов. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Тема 4 Степенные ряды

Определение степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус сходимости и интервал сходимости. Область сходимости. Свойства степенных рядов: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Тема 5 Ряд Тейлора

Определения ряда Тейлора. Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Использование ряда Тейлора для вычисления пределов, для вычисления приближенных значений функции, для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тематический план

Учебный процесс по курсу осуществляется в виде лекций, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, самостоятельной учебной работы студентов. Итоговой формой контроля знаний является экзамен. Распределение часов по разделам и темам представлена в таблице 1.

Таблица 1.1 – Распределение часов по разделам и темам курса

№ пп	Название темы	Всего часов	В том числе			Форма контроля знаний
			Лекции	Практические	СУРС	
1	**Раздел 1 Числовые множества**	**14**	**8**	**6**		
2	Тема 1 Множества	6	4	2		
3	Тема 2 Грани числовых2множеств	4	2	2		
4	Тема 3 Множество комплексных чисел	4	2	2		
5	**Раздел 2 Теория пределов**	**30**	**20**	**10**		
6	Тема 1 Числовые последовательности	4	2	2		
7	Тема 2 Предел последовательности	6	4	2		
8	Тема 3 Предел функции	8	6	2		
9	Тема 4 Бесконечно малые функции	4	2	2		К/р по разделу «Теория пределов»
10	Тема 5 Непрерывность функции	8	6	2		
11	**Раздел 3 Дифференциальное исчисление функции действительной переменной**	**48**	**26**	**22**		
12	Тема 1 Определение производной	4	2	2		
13	Тема 2 Производная обратной и сложной функции	4	2	2		
14	Тема 3 Производные и дифференциалы высших порядков	4	2	2		
15	Тема 4 Теоремы о среднем. Правило Лопиталя	6	4	2		
16	Тема 5 Формула-Тейлора	6	4	2		
17	Тема 6 Локальные и глобальные экстремумы функции	6	4	2		
18	Тема 7 Исследование функции	4	2	2		
19	Тема 8 Построение графиков функций	4	–	4		К/р по разделу «Дифференциальное исчисление функции действительной переменой»

20	Тема 9 Векторные функции	6	4	2		
21	Тема 10 Кривизна кривой	4	2	2		
22	**Раздел 4 Интегральное исчисление функции действительной переменной**	**44**	**24**	**20**		
23	Тема 1 Первообразная и неопределенный интеграл	4	2	2		
24	Тема 2 Общие методы интегрирования	4	2	2		
25	Тема 3 Интегрирование рациональных функций	4	2	2		
26	Тема 4 Интегрирование иррациональностей	4	2	2		
27	Тема 5 Интегрирование трансцендентных функций	4	2	2		
28	Тема 6 Определенный интеграл и формула Ньютона Лейбница	6	4	2		
29	Тема 7 Геометрические приложения определенного интеграла	4	2	2		
30	Тема 8 Физические приложения определенного интеграла	4	2	2		
31	Тема 9 Несобственные интегралы	10	6	4		К/р по разделу «Интегральное исчисление функции действительной переменной»
32	**Раздел 5 Теория рядов**	**24**	**12**	**12**		
33	Тема 1 Ряды с неотрицательными членами	6	4	2		
34	Тема 2 Знакопеременные ряды	4	2	2		
35	Тема 3 Функциональные ряды	4	2	2		
36	Тема 4 Степенные ряды	4	2	2		К/р по разделу «Теория рядов»
37	Тема 5 Ряд Тейлора	6	2	4		Итоговый тест
38	**Итого**	**160**	**90**	**70**	**0**	

Лекционный курс

Раздел 1 Числовые множества

Тема 1 Множества

1.1 Язык теории множеств
1.2 Операции над множествами
1.3 Числовые множества
1.4 Понятие функции

Понятие множества считается первоначальным, неопределяемым. Под *множеством* понимается совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое. Объекты, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Способы задания множеств:

– перечислением его элементов – если множество A состоит из элементов a, b, c, d, то пишут $A=\{a,b,c,d\}$;

– указанием характеристики свойств элементов – если множество A задается указанием характерного свойства $P(x)$ его элементов, то пишут $A=\{x \mid P(x)\}$.

– диаграммы Эйлера-Венна – множество изображается в виде кругов, треугольников или геометрических фигур произвольной формы, внутри которых располагаются элементы множества.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом Ø.

Множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A. Равенство множеств A и B обозначают $A=B$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов. Если множество A *не равно* множеству B, то пишут $A \neq B$.

Множество A, $A \neq \varnothing$, называется *подмножеством* множества B, $B \neq \varnothing$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Если A – подмножество множества B, то пишут $A \subseteq B$.

Понятие подмножества определяет между двумя множествами *отношение включения*. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$,то A называется *собственным подмножеством* множества B и *обозначается* $A \subset B$.

Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется *основным* или *универсальным*. Обозначается универсальное множество буквой U .

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (или обоим одновременно):

$$A \cup B = \left\{ x \middle| \, x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$$A \cap B = \left\{ x \middle| \, x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$$

Разностью двух множеств B и A называется множество $B \setminus A$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат B , но не принадлежат A :

$$B \setminus A = \left\{ x \middle| \, x \in B \text{ и } x \notin A \right\}.$$

Разность $U \setminus A$ называется *дополнением* множества A до универсального множества U и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} = U \setminus A = \left\{ x \middle| \, x \notin A \right\}.$$

Пара элементов $(x; y)$, $x \in A$, $y \in B$, называется *упорядоченной*, если указан порядок записи элементов x и y . Элементы x и y упорядоченной пары $(x; y)$ называются *координатами*, при этом x – первая координата, y – вторая. При этом $(x_1; y_1) = (x_2; y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Основные числовые множества:

– множество *натуральных* чисел, т.е. чисел, которые используются при счете:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, ... \} ;$$

– объединение натуральных чисел, чисел, им противоположных и нуля составляет множество *целых* чисел:

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \} ;$$

– множество чисел вида p/n , где $p \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{N}$, называется *множеством рациональных* чисел:

$$\mathbb{Q}=\left\{ q=\frac{p}{n}\,\Big|\; p\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N} \right\};$$

– числа, которые представимы в виде бесконечной непериодической десятичной дроби называются *иррациональными*;

– объединение рациональных и иррациональных чисел составляет *множество действительных* чисел $\mathbb{R}$.

Очевидно, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$, пополненное символами $-\infty$ и ∞, *обозначается* $\overline{\mathbb{R}}$ и называется *расширенным множеством действительных чисел*, бесконечности $-\infty$ и ∞ называются *бесконечно удаленными точками* числовой прямой, остальные точки – *конечными точками* числовой прямой.

Основными промежутками во множестве $\overline{\mathbb{R}}$ являются:

– *интервал* с концами a и b: $(a;b)=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; a<x<b \right\}$;

– *отрезок* с концами a и b: $[a;b]=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; a\le x\le b \right\}$;

– *полуинтервалы*:

$$[a;b)=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; a\le x<b \right\},\ (a;b]=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; a<x\le b \right\};$$

– *бесконечные* интервалы и полуинтервалы:

$$[a;+\infty)=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; x\ge a \right\},\ (a;+\infty)=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; x>a \right\},$$

$$(-\infty;b)=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; x<b \right\},\ (-\infty;b]=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; x\le b \right\},$$

$$(-\infty;+\infty)=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; -\infty<x<\infty \right\}.$$

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A\times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(x;y)$:

$$A\times B=\left\{ (x;y) \,\middle|\; \forall x\in A, \forall y\in B \right\}.$$

Если $A=B$, то $A\times A$ называется *декартовым квадратом* и обозначается A^2, т.е. $A^2=A\times A$.

Пусть X, Y – произвольные множества. Соответствие, при котором каждому элементу $x\in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y\in Y$, называется *функцией* (*отображением*), заданной на множестве X со значениями во множестве Y, при этом элемент x называется *независимой* переменной (*аргументом*), элемент y – *зависимой* переменной и обозначается:

$$y=f(x),\ x\in X,\ f: x\mapsto y \text{ при } x\in X \text{ и } y\in Y;\ f: X\to Y.$$

Множество X называется *областью определения* функции f и *обозначается* $D(f)$. Множество тех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, называется *множеством значений* функции f и *обозначается* $E(f)$. Очевидно, что $E(f) \subseteq Y$.

Определение функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f : x \mapsto y \Leftrightarrow \forall x \in X \ \exists! y \in Y : y = f(x).$$

Элемент $y \in Y$, в который отображен $x \in X$, называется *образом* элемента x при отображении f и *обозначается* $f(x)$. Элемент x называется *прообразом* элемента $f(x)$. Поэтому отображение удобно записывать в виде $y = f(x),\ x \in X$.

Множество образов всех элементов $x \in X$ при отображении f называется *образом множества* X при этом отображении:

$$f(X) = \{ f(x) | x \in X \} \subseteq Y.$$

Полным прообразом множества $B \subset Y$ при отображении f называется множество $f^{-1}(B)$, состоящее из всех прообразов всех элементов множества B:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X | f(x) \in B \} \subseteq X.$$

Функция f^{-1} называется *обратной* к функции f, если элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y.

Определение обратной функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f^{-1} : x \mapsto y \ \Leftrightarrow \ \forall y \in Y \ \exists\, x \in X : x = f^{-1}(y).$$

Если $f : x \mapsto y$ и $g : y \mapsto z$ функции, то функция $g \circ f : x \mapsto z$, ставящая в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $z \in Z$, $g \circ f = g(f(x))$, называется *сложной* функцией или *композицией* функций f и g.

Два множества A и B называются *эквивалентными* (*равномощными*), если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое. *Обозначается*: $A \sim B$.

Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счетным*. Если множество счетное, то его элементы можно занумеровать. Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются *конечными*. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Если A – конечное множество, то число его элементов обозначается $|A|$ или $\dim A$ и называется *мощностью множества* A.

Тема 2 Грани числовых множеств

2.1 Точные грани числовых множеств
2.2. Система вложенных отрезков
2.3 Метод математической индукции
2.4 Бином Ньютона

Рассмотрим произвольное числовое множество $A \subset \mathbb{R}$.

Множество действительных чисел A называется *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число M, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \le M$, т. е.

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \;\; x \le M .$$

При этом число M называется *верхней гранью* множества A.

Множество A неограничено сверху, если

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists x_0 \in A \;\; x_0 > M .$$

Элемент $c_1 \in A$ называется наибольшим элементом множества A, если $\forall x \in A \;\; x < c_1$.

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества $A \subset \mathbb{R}$ называется *точной верхней гранью* и *обозначается* $M = \sup A$:

$$M = \sup A \iff \forall x \in A : x \le M \text{ и } \forall M' < M \quad \exists x_0 > M', x_0 \in A .$$

Множество действительных чисел A называется *ограниченным снизу*, если существует такое действительное число m, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \ge m$, т. е.

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A \;\; x \ge m .$$

При этом число m называется *нижней гранью* множества A.

Множество A *неограничено снизу*, если

$$\forall m \in \mathbb{R} : \exists x_0 \in A \;\; x_0 < m .$$

Элемент $c_2 \in A$ называется *наименьшим элементом* множества A, если $\forall x \in A \;\; x > c_2$.

Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset \mathbb{R}$ называется *точной нижней гранью*.

Обозначается:

$$m = \inf A \iff \forall x \in A : x \geq m \text{ и } \forall m' > m \quad \exists x_0 \leq m', x_0 \in A.$$

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*: $\exists K > 0 : \forall x \in A \quad |x| \leq K$.

Теорема (о существовании верхней грани) Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Система числовых отрезков

$$[a_1; b_1],\ [a_2; b_2],\ \ldots,\ [a_n; b_n], \ldots,\ a_n \in \mathbb{R},\ b_n \in \mathbb{R},$$

называется *системой вложенных отрезков*, если

1) каждый следующий отрезок содержится в предыдущем

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots;$$

2) концы отрезков $\forall n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенству

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n.$$

Длины $b_n - a_n$ отрезков $[a_n; b_n]$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, называются *стремящимися к нулю*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

Лемма (о вложенных отрезках) Всякая система вложенных числовых отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет единственную точку, принадлежащую всем отрезкам.

Метод математической индукции используется при доказательстве утверждений, зависящих от натурального аргумента. Для доказательства необходимо:

1) проверить верность утверждения при $n = 1$ (либо для первого натурального числа, для которого доказывается утверждение);

2) в предположении, что утверждение верно для $n = k$, доказать его справедливость для следующего натурального числа $n = k + 1$.

При решении задач часто используется *бином Ньютона*.

Пусть задано конечное множество элементов. Группы элементов, состоящие их одних и тех элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками*. Число возможных перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!,\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,\ 0! = 1.$$

Каждое множество, содержащее k элементов из числа n заданных, называется *сочетанием* n *элементов по* k. Число всевозможных сочетаний из n элементов по k определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Числа C_n^k можно последовательно находить с помощью треугольника Паскаля, который представляет собой треугольную таблицу:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ . & . & . & . & . & . & & & \end{array}$$

Первые и последние числа во всех строчках таблицы равны 1. Начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки. В каждой n строчке стоят последовательно числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n.

Число сочетаний используется при вычислении коэффициентов в формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Тема 3 Множество комплексных чисел

3.1 Понятие комплексного числа

3.2 Комплексная плоскость

3.3 Действия над комплексными числами в алгебраической форме

3.4 Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение вида $x+iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, где i удовлетворяет условию $i^2 = -1$, при этом число x называется *действительной частью* а число y – *мнимой частью* комплексного числа z.

Для комплексного числа z приняты обозначения

$$z = x + iy,\ \operatorname{Re} z = x,\ \operatorname{Im} z = y.$$

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется *алгебраической формой комплексного числа.* Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Любое действительное число x можно рассматривать как комплексное число, т.е. $x = x + 0 \cdot i$.

Поэтому множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Отсюда

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Комплексное число $z = 0 + i \cdot 0$, называется *нулем* и обозначается 0.

Понятие неравенства для комплексных чисел существует лишь в смысле отрицания равенства, т. е. $z_1 \neq z_2$ означает, что число z_1 не равно числу z_2. Понятия «меньше» и «больше» для комплексных чисел не определены.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x - iy$. Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными.*

Комплексное число $z = x + iy$ геометрически изображается на плоскости $\mathbb{R}^2$ *точкой* с координатами x, y, или *вектором* $\vec{z}$, проекции которого на оси Ox и Oy соответственно равны x и y. При этом координатную плоскость Oxy называется *комплексной плоскостью* и обозначается $\mathbb{C}$, ось абсцисс – *действительной* осью, ось ординат – *мнимой* осью комплексной плоскости (рисунок 1. 1).

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется расстояние от точки $z(x, y)$ до начала координат и *обозначается* $|z|$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ, образованный положительным направлением Ox и вектором $\vec{z}$.

Обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент z ($z \neq 0$) определяется равенствами (рисунок 1.1):

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Модуль комплексного числа z определяется однозначно, а аргумент φ – с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi,$, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$.

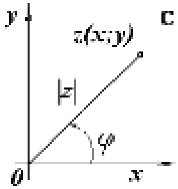


Рисунок 1. 1 – Комплексная плоскость $\mathbb{C}$

Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны суммам соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны разностям соответственно действительных и мнимых частей этих чисел:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексного числа z_1 *на* $z_1 \ne 0$ вводится как действие, обратное умножению, т.е. под *частным* $\frac{z_1}{z_2}$, $\forall z_2 \ne 0$, понимается комплексное число z, такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Частное получается путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на комплексно-сопряженное знаменателю число $\bar{z}_2$:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Возведение комплексного числа z *в степень* n, $n\in\mathbb{N}$, рассматривается как умножение числа z на себя n раз: z^n.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Любому комплексному числу $z\in\mathbb{C}$, заданному в алгебраической форме, соответствует точка $M(x;y)\in\mathbb{R}^2$, положение которой однозначно определяется ее декартовыми координатами x, y. Вводя полярные координаты (полярная ось u совпадает с положительным направлением действительной оси Ox, полюс O – с началом координат O, полярный угол φ равен углу между полярной осью и лучом OM), эту точку можно однозначно определить заданием главного значения аргумента $\arg z$ и модуля $|z|$ комплексного числа z.

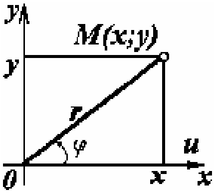


Рисунок 1. 2 – Связь декартовых и полярных координат

Из рисунка 1. 2 видно, что модуль $|z|$ совпадает с полярным радиусом r точки $M(x;y)$, главный аргумент $\arg z$ – с полярным углом φ, при этом $0\le r<\infty$, $-\pi<\varphi\le\pi$.

Очевидно, что $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Тогда

$$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Выражение $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Тригонометрической формой комплексного числа удобно пользоваться при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пусть

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \ n \in \mathbb{N} .$$

Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме

$$z = \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right), \ n \in \mathbb{N} ,$$

$$k = 0,1,2,..., n-1 .$$

Показательная форма комплексного числа. Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Используя формулу Эйлера $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, получаем

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi} .$$

Выражение $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа.

Здесь $r = |z|; \ \varphi = \arg z + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$.

Функция $\mathrm{e}^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\varphi}$, $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\varphi}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \, \mathrm{e}^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} .$$

Если $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{\mathrm{e}^{i\varphi_1}}{\mathrm{e}^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} .$$

Если $n \in \mathbb{N}$, $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, то

$$z^n = \left(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n = r^n \mathrm{e}^{in\varphi} .$$

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{e}^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}, \ k = 0,1,2,..., n-1.$$

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Какие множества называются равными?

2 Что называется подмножеством множества?

3 Какое подмножество называется собственным подмножеством множества?

4 Что называется декартовым произведением множеств?

5 Что называется функцией?

6 Дайте определение области определения, области значения функции.

7 Какие множества называются эквивалентными?

8 Какое множество называется счетным?

9 Какие множества называются ограниченными?

10 В чем заключается метод математической индукции?

11 Дайте определение точной верхней (нижней) грани множества.

12 Какое число называется комплексным?

13 Какие два комплексных числа называются равными, сопряженными?

14 Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.

Формулировки теорем и формулы

1 Запишите с помощью кванторов определение операций объединения, пересечения, разности и дополнения множеств.

2 Как изображаются комплексные числа на плоскости?

3 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме. Запишите соответствующие формулы.

4 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Запишите соответствующие формулы.

5 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме. Запишите соответствующие формулы.

6 Перечислите арифметические действия над последовательностями.

7 Перечислите свойства сходящихся последовательностей.

8 Сформулируйте с помощью логических символов определение расходящейся последовательности, бесконечно большой последовательности.

9 Перечислите способы задания функций.

10 Какими элементарными свойствами обладают функции?

Доказательство теорем

1 Сформулируйте и докажите теорему о существовании точной верхней (нижней) грани.

2 Сформулируйте и докажите лемму о вложенных отрезках.

Вопросы и задачи на понимание

1 Приведите примеры множеств, ограниченных сверху, снизу.

2 Приведите примеры числовых множеств X, у которых: а) $\sup X \in X$; б) $\sup X \notin X$; в) $\inf X \in X$; г) $\inf X \notin X$. Имеет ли множество X в случаях а) и б) наибольше, а в случаях в) и г) наименьшее число?

3 Что означает запись $\sup X = +\infty$ и $\inf X = -\infty$?

Раздел 2 **Теория пределов**

Тема 1 Числовые последовательности

1.1 Определение числовой последовательности
1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности
1.3 Монотонные последовательности
1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

В курсе школьной математики кратко излагались элементы теории последовательности при изучении арифметической и геометрической прогрессий, при последовательных приближениях иррациональных чисел.

Числовой последовательностью (x_n) называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и принимающая свои значения из множества действительных чисел $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и *обозначается*:

$$x_n = (x(1); x(2); ...; x(n); ...) \text{ или } (x_n) = (x_1; x_2; ...; x_n; ...).$$

Числа $x_1, x_2, x_3, ...$ называются *элементами* (*членами*) последовательности (x_n), x_n – *формула* общего члена последовательности, n – *номер* общего члена последовательности.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее любого элемента.

Основными *способами задания* последовательности являются: формула n-го члена, рекуррентный, словесный, графический.

Пусть даны две последовательности (x_n), (y_n).

Суммой последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность $(x_n + y_n)$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов последовательностей.

Произведением последовательности (x_n) на число m называется последовательность $(m \cdot x_n)$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента последовательности на число m.

Произведением последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность $(x_n \cdot y_n)$, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов последовательностей.

Если все члены последовательности (y_n) отличны от нуля, то частным последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$, каждый элемент которой равен частному соответствующих элементов последовательностей.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует число M (m) такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n \le M$ ($x_n \ge m$). Числа M и m называются *верхней и нижней гранями* числовой последовательности (x_n):

$$(x_n) - \textit{ограничена сверху} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \le M .$$

$$(x_n) - \textit{ограничена снизу} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \ge m .$$

Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что каждый элемент x_n последовательности удовлетворяет неравенству $m \le x_n \le M$:

$$(x_n) - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R} : \forall\, n \in \mathbb{N} \quad m \le x_n \le M .$$

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде $|x_n| \le A$.

Последовательность (x_n) называется *неограниченной*, если для любого действительного числа $A > 0$ существует элемент x_n последовательности, удовлетворяющий неравенству $\left|x_n\right| \geq A$, т.е. либо $x_n \geq A$ или $x_n \leq -A$:

$$\left(x_n\right) - \textit{неограниченна} \Leftrightarrow \ \forall A \in \mathbb{R}_+ \ \exists n \in \mathbb{N} : \left|x_n\right| \geq A .$$

Последовательность $\left(x_n\right)$ называется *неубывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$.

Последовательность $\left(x_n\right)$ называется *возрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.

Последовательность $\left(x_n\right)$ называется *невозрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$.

Последовательность $\left(x_n\right)$ называется *убывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$.

Последовательность $\left(x_n\right)$ называется *монотонной*, если является одной из выше перечисленных. Последовательность $\left(x_n\right)$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

Последовательность $\left(\alpha_n\right)$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\alpha_n\right| < \varepsilon$:

$$\left(\alpha_n\right) - \text{б.м.п.} \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \left|\alpha_n\right| < \varepsilon .$$

Свойства бесконечно малых последовательностей:

– бесконечно малая последовательность $\left(\alpha_n\right)$ ограничена;

– сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малой последовательность $\left(\alpha_n\right)$ на ограниченную $\left(x_n\right)$ есть бесконечно малая последовательность.

Последовательность $\left(x_n\right)$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа $c > 0$ существует такой номер $N(k)$ такой, что для всех номеров $n > N(k)$ выполняется неравенство $|x_n| > c$:

$$(x_n) - \text{б.б.п.} \Leftrightarrow \ \forall\, c > 0 \ \exists N(k): \forall n \geq N(k) \quad |x_n| > c.$$

Если последовательность бесконечно большая, то она неограниченна. Если последовательность неограниченна, то она не обязательно бесконечно большая. Если (x_n) бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ является бесконечно малой последовательность. Если (α_n) бесконечно малая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$ является бесконечно большой последовательностью.

Тема 2 Предел последовательности

2.1 Определение предела последовательности
2.2 Свойства предела последовательности
2.3 Критерий Коши сходимости последовательности
2.4 Замечательные пределы

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности (x_n), если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ и *обозначается*: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся* (к числу *a*), а последовательности, не имеющие конечного предела, – *расходящимися*.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что последовательность $(x_n - a)$ является бесконечно малой последовательностью. Отсюда следует, что любую сходящуюся последовательность можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где (α_n) – бесконечно малая последовательность, где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Бесконечно большая последовательность (x_n) имеет бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall\, A > 0\ \exists N(A) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(A) \quad |x_n| > A.$$

Сходящиеся последовательности обладают следующими *свойствами*:

– сходящаяся последовательность имеет только один предел;

– если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : |x_n| \leq M;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

– частное двух сходящихся последовательностей (x_n) и (y_n), $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n};$$

– если все элементы сходящейся последовательности (x_n), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b$ ($a \leq b$);

– пусть последовательности (x_n), (y_n), (z_n) таковы, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда последовательность (y_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;

– каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если для любого малого действительного числа ε найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, больших $N(\varepsilon)$ и любого $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$:

(x_n) – фундаментальна $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon)$ и $\forall\ p \in \mathbb{N}$ $\quad \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Из определения следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{n+p} - x_n\right| = 0$.

Критерий Коши сходимости последовательности: Для того чтобы последовательность (x_n) была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Пределы, к которым сводятся вычисления многих пределов условно называются замечательными пределами. Ниже приводятся некоторые из них:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$ ($a \in \mathbb{R}$); $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ ($a \in \mathbb{R}$); $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!} = 0$.

Тема 3 Предел функции

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции
3.2 Способы задания функции
3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши
3.4 Односторонние пределы функции

Под функциями понимается отображение числовых множеств.

Пусть X – произвольное подмножество действительных чисел, $X \subseteq \mathbb{R}$.

Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X определена *числовая функция* f. Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, y – *зависимой переменной*, множество X называется *областью определения* функции и *обозначается* $D(f)$, а множество $Y=\{\, y\in\mathbb{R} \mid y=f(x),\, x\in D(f)\,\}$ – *множеством значений* функции и *обозначается* $E(f)$.

Если о функции говорить как об отображении $f: X\to Y$, то $f(x)$ называется *образом элемента* x, а x – *прообразом элемента* $f(x)$. При этом множество Y называется *образом множества* X, множество X – *прообразом множества* Y.

Чтобы определить функцию $y=f(x)$, нужно задать множество X и закон (правило, соответствие) f, переводящий элементы x множества X в элементы y множества Y.

Пусть функции $u=\varphi(x)$ и $y=f(u)$ определены на множествах X и U соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения f. Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y: $x\overset{\varphi}{\mapsto}u\overset{f}{\mapsto}y$.

Таким образом, каждому значению x ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно значение $y=f(\varphi(x))$. В этом случае y называется *сложной* функцией (*композицией* функций f и φ) аргумента x. При этом функция $u=\varphi(x)$ называется *промежуточным* аргументом, x – *независимым* аргументом. *Обозначается*: $y=f(\varphi(x))$ или $f\circ\varphi$.

Обратная функция. Пусть функция $y=f(x)$ такова, что каждое значение y она принимает только при одном значении x. Такая функция называется *обратимой*. Тогда уравнение $y=f(x)$ можно однозначно разрешить относительно x, т.е. каждому y соответствует единственное значение x. Это соответствие определяет функцию, которая называется *обратной* к функции f.

Обозначается: $x=f^{-1}(y)$ или f^{-1}.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к функции f, то функция f является обратной по отношению к f^{-1}, т.е.

$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными*, т.е. $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ и $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

Если числовая функция $y = f(x)$ строго монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то f^{-1} – убывающая.

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$ совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy , т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

Функция задается одним из следующих способов.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_0 записывается в виде $f(x_0)$ или $y\big|_{x=x_0}$.

При аналитическом задании функции область определения D есть множество значений аргумента x, при которых данная формула имеет смысл.

Аналитически функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ может быть *неявно* задана уравнением $F(x;y) = 0$, если $\forall x \in [a;b]$ $F(x; f(x)) = 0$.

В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x;y) = 0$ относительно y, удается получить явное задание функции $y = f(x)$.

Аналитически функция $y = f(x)$ может быть задана в *пара-*

метрическом виде. Пусть $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t\in T$. Если $x=\varphi(t)$ монотонна на *T*, то существует обратная к ней функция $t=\varphi^{-1}(x)$. Поэтому функцию $y=\psi(t)$, $t=\varphi^{-1}(x)$ можно рассматривать как сложную функцию, переводящую элемент x в элемент y посредством промежуточной переменной t:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\varphi^{-1}(x), \\ y=\psi(t), \end{cases} \Rightarrow y=\psi(\varphi^{-1}(x))=F(x).$$

В этом случае говорят, что сложная функция

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x))=F(x)$$

задана *параметрическими уравнениями* и пишут:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

где t, *парамет*р, $t\in T$.

Всякую функцию, заданную явно $y=f(x)$, *можно задать параметрическими уравнениями.*

Действительно,

$$y=f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=t, \\ y=f(t). \end{cases}$$

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр *t*, оказываются простыми.

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1;x_2;...;x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1;y_2;...;y_n$.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y=f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Графиком Г *функции* $y=f(x)$ называется множество точек $M(x;y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью:

$$\Gamma = \left\{ M\left(x;y\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = f\left(x\right) x \in D\left(f\right) \right\}.$$

Средствами элементарной математики для функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики.

Нули функции и знак функции на множестве $D(f)$. Значение $x \in D(f)$ при котором функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем функции*, т.е. нули функции являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox, а в интервале, на котором она отрицательна,– ниже оси Ox; в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox.

Четность и нечетность функции. Числовая функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если выполняются следующие условия:

1) область ее определения симметрична относительно точки O, т. е. для каждой точки $x \in D(f)$ существует точка $-x \in D(f)$;

2) для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями *общего* вида.

Ось Oy является осью симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центром симметрии графика нечетной функции. Графики функций, не обладающих свойствами четности или нечетности, не симметричны.

При изучении поведения четной (нечетной) функции достаточно изучить ее при любом $x > 0$ и продолжить это изучение по симметрии на любое $x < 0$.

Периодичность функции. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $D(f)$, называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что $\forall\ x \in D(f)$ выполняются следующие условия:

1) $x - T,\ x + T\ \in D(f)$;

2) $f(x) = f(x-T) = f(x+T)$.

Число T называется *периодом* функции.

Если число T является периодом функции $y=f(x)$ для любого $n\in\mathbb{Z}$, то число nT – также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то он называется *основным периодом*. Если T – период функции $y=f(x)$, то достаточно построить график на одном из интервалов длиной T, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k\in\mathbb{Z}$. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то функция $f(kx)$ – также периодическая с периодом $\dfrac{T}{|k|}$.

К периодическим функциям относится постоянная функция $f(x)=c$, $c=\text{const}$, $D(f)=\mathbb{R}$. Любое число $T\in\mathbb{R}$ является периодом этой функции, но наименьшего (основного) периода T функция не имеет.

Монотонность функции. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$f(x)\ \textit{возрастает на}\ X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)<f(x_2);$$

$$f(x)\ \textit{убывает на}\ X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)>f(x_2).$$

Функция $y=f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции:

$$f(x)\ \textit{не убывает на}\ X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)\le f(x_2);$$

$$f(x)\ \textit{не возрастает на}\ X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)\ge f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*, а неубывающие и невозрастающие – *монотонными*.

Ограниченность функции. Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве $X\subseteq D(f)$, если существует такое число $M\in\mathbb{R}$, что при любых $x\in X$ выполняется условие $f(x)\le M$ ($f(x)\ge M$):

$$f(x)\ \textit{ограничена сверху на}\ X \ \Leftrightarrow\ \exists M\in\mathbb{R}: \forall x\in X \quad f(x)\le M;$$

$$(\ f(x)\ \textit{ограничена снизу на}\ X \ \Leftrightarrow\ \exists M\in\mathbb{R}: \forall x\in X \quad f(x)\ge M\ ).$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое положительное число M, что для любого $x \in X$ выполняется условие $|f(x)| \le M$:

$$f(x) \text{ *ограничена на* } X \iff \exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le M .$$

Функция $y = f(x)$ называется *неограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subseteq D(f)$ если условия ограниченности не выполняются:

$f(x)$ *неограничена сверху на* $X \iff \forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in X: \; f(x) > M$;

($f(x)$ *неограничена снизу на* $X \iff \forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in X: f(x) < M$).

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0) = \{x | \; 0 < |x - x_0| < \delta \}$. В точке x_0 значение $f(x_0)$ может быть не определено.

Число A называется *пределом* (*по Гейне*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности точек $x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))$ сходится к A:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall (x_n), x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0): \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a .$$

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0: \forall x \;\; 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определения предела функции в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Предел функции обладает следующими *свойствами*.

– функция $f(x)$ в точке x_0 не может иметь больше одного предела;

– если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то она ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$;

– если функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $(b \neq 0)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливо функциональное неравенство $f(x) \le \varphi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливы функциональные неравенства $\psi(x) \le f(x) \le \varphi(x)$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$;

– если в окрестности точки x_0 задана сложная функция $y = f(u(x))$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$ ($u(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$), $\lim\limits_{x \to x_0} f(u) = A$, то существует предел сложной функции $y = f(u(x))$ в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

Левой δ-окрестностью точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - x_0 \le 0$:

$$U(\delta; x_0 - 0) = \left\{ x \middle| -\delta < x - x_0 \le 0 \right\}.$$

Правой δ-окрестностью точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $0 \le x - x_0 < \delta$:

$$U(\delta; x_0 + 0) = \left\{ 0 \le x - x_0 < \delta \right\}.$$

Число A называется *левым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0)$$

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется *правым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 + 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 + 0)$$

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные правый и левый пределы и они равны между собой $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Критерий Коши существования предела функции: для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = x_0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(\delta; x_0)$ точки x_0 такая, что для любых $\forall x', x'' \in U(\delta; x_0)$ имеет место неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Тема 4 Бесконечно малые функции

4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций
4.2 Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций
4.3 Первый и второй замечательные пределы
4.4 Сравнение асимптотического поведения функций

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (или бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Обозначается: $\alpha(x) = o(1)$.

Функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

– конечная сумма бесконечно малых функций есть функция, бесконечно малая;

– произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и функции ограниченной $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция;

– произведение некоторого числа и бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция;

– произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;

– частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $\varphi(x)$, такую, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, есть бесконечно малая функция;

– если функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая, то функция $\frac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = e, \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^\infty\right) = e.$$

Под *асимптотикой*, или *асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки* $x_0 \in \mathbb{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0,$$

то они называются *бесконечно малыми одного порядка малости.*

Обозначается: $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ *ограничена*.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то они называются *эквивалентными* (*асимптотически равными)* при $x\to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim$$

$$\sim\ln(1+\alpha(x))\sim e^{\alpha(x)}-1,\ \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{1}{n}\alpha(x).$$

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если при $x\to x_0$ $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Данное свойство используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечно малой функцией более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$ и обозначается: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in o(1)$ при $x\to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x \to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c \neq 0$, $k > 0$, то $\alpha(x)$ называется функцией k*-го порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида

$$\alpha(x) = O(\beta(x)),\ \alpha(x) = o(\beta(x)),\ \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

называются *асимптотическими оценками*.

Ниже приведены некоторые важные пределы, которые используются при вычислении:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Тема 5 Непрерывность функции

5.1 Определение непрерывности функции
5.2 Точки разрыва и их классификация
5.3 Свойства непрерывных функций
5.4 Равномерная непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0 \in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется *разрывной в точке* x_0, а точка x_0 – *точкой разрыва*.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Коши*), если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число

$\delta > 0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

$f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пусть $x - x_0 = \Delta x$ есть приращение аргумента, а $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ приращение функции в точке x_0. При фиксированном x_0 переменной x приращение Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений виден на рисунке 2. 1.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции в терминах приращений.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется *непрерывной слева (справа)* в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он равен $f(x_0)$:

$f(x)$ *непрерывна справа в точке* $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$,

$f(x)$ *непрерывна слева в точке* $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

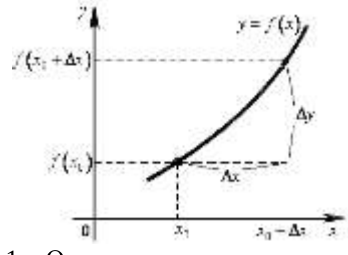


Рисунок 2. 1 – Определение непрерывности функции

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Гейне*), если для любой последовательности точек $x_n \in U(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))$ сходится к $f(x_0)$:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n),\ x_n \in U(\delta; x_0): \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется *непрерывной на множестве* X.

Если $X = [a;b]$, то для непрерывности функции на $[a;b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b. Класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $\mathrm{C}[a;b]$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x) \neq 0$, также непрерывны в этой точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X, и множество ее значений Y.

Число M (m) называется *точной верхней (нижней) гранью* функции $y = f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия

1) $\forall x \in X \quad f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$);

2) для любого числа $M' < M$ $(m' > m)$ найдется такая точка $x' \in X$, что $f(x') > M'$ ($f(x') < m'$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y = f(x)$ на множестве X, условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то пишут $\sup\limits_X f(x) = +\infty$, если снизу, то $\inf\limits_X f(x) = -\infty$.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = A$ и $f(x_0) \neq A$.

Вводя новую функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq x_0, \\ A, \text{ если } x = x_0, \end{cases}$$

получим

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f_1(x) = A = f_1(x_0),$$

т. е. новая функция является непрерывной.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ будет *непрерывной слева*, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ – *непрерывной справа*.

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* 2-*го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел: равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

При исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения 1. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы и значение функции в исследуемой точке.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке*

$[a;b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a;b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой* $\mathbb{R}$, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Многочлен $P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{0,n}$, является функцией, непрерывной для любого $x\in\mathbb{R}$.

Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в любой точке $x\in\mathbb{R}$, для которой $Q(x)\neq 0$. Здесь $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Тогда справедливы следующие равенства для непрерывных функций:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right),\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Пусть функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y – множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x=f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.

Непрерывные функции обладают следующими свойствами.

1 (устойчивость знака непрерывной функции) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

2 (прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ, в которой значение функции равно нулю:

$$f(x):\ f(a)f(b)<0 \ \Rightarrow\ \exists x_0 \in (a;b):\ f(x_0)=0.$$

3 Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка $c \in [a;b]$, что $f(c)=C$.

Свойство 3 можно переформулировать так: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения между ними.

4 (ограниченность непрерывных функций) Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

5 (достижение непрерывной функцией своих точных граней) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что

$$M = f(x_1)=\sup_{[a;b]} f(x),\ m = f(x_2)=\inf_{[a;b]} f(x).$$

Из множества функций, непрерывных на числовом промежутке, выделяют равномерно-непрерывные функции.

Функция $f(x)$ называется *равномерно-непрерывной* на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любых двух точек x_1, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $|x_1-x_2|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$:

$f(x)$ *равномерно-непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x_1,x_2 \in X \quad |x_2-x_1|<\delta \quad |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

Число δ зависит только от ε и является общим для всех значений x_1, $x_2 \in X$ переменной x.

Геометрическая интерпретация равномерной непрерывности функции: если $f(x)$ равномерно-непрерывна на X, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что прямоугольник со сторонами $\delta(\varepsilon)$ и ε, параллельными осям Ox и Oy, можно переместить вдоль графика (сохраняя параллельность сторон осям координат), что график не пересечет горизонтальных сторон прямоугольника, а будет пересекать только вертикальные стороны (рисунок 2. 2).

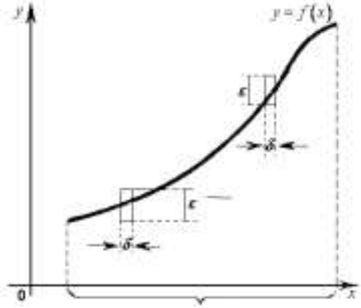


Рисунок 2. 2 – Равномерная непрерывность функции

Очевидно, что равномерно-непрерывная функция $f(x)$ на промежутке X является непрерывной на X .

Теорема (Кантора) Функция $f(x)$*, непрерывная на отрезке* $[a;b]$*, равномерно-непрерывна на этом отрезке.*

Теорема не верна, если отрезок заменить интервалом.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Сформулируйте определение числовой последовательности.

2 Дайте определение ограниченной и неограниченной последовательности.

3 Какие последовательности называются монотонными, строго монотонными?

4 Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности.

5 Перечислите свойства бесконечно малых последовательностей.

6 Дайте определение предела последовательности.

7 Сформулируйте определение числовой последовательности.

8 Дайте определение ограниченной и неограниченной последовательности.

9 Какие последовательности называются монотонными, строго монотонными?

10 Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности.

11 Перечислите свойства бесконечно малых последовательностей. Дайте определение предела последовательности.

12 Какая последовательность называется фундаментальной?

13 Дайте определение функции, ее области определения, множества значений.

14 Дайте определение сложной функции.

15 Дайте определение обратной функции.

16 Сформулируйте определения предела функции в точке по Гейне и по Коши.

17 Дайте определения односторонних пределов функции.

18 Дайте определение бесконечно малой функции.

19 Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке?

20 Сформулируйте определения непрерывной функции.

21 Какие точки называются точками разрыва функции?

22 Дайте определения: а) точек устранимого разрыва, б) точек разрыва 1-го рода, в) точек разрыва 2-го рода.

23 Дайте определение равномерно-непрерывной функции.

Формулировки теорем и формулы

1 Критерий Коши существования предела функции.

2 Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными?

3 Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.

4 Какая связь между односторонними пределами и пределом функции?

5 Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности?

6 Сформулируйте теорему Кантора о равномерной непрерывности функции.

Доказательства теорем

1 Докажите теорему Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности.

2 Докажите число e.

3 Докажите критерий Коши о сходимости фундаментальной последовательности.

4 Докажите эквивалентность определений предела функции по Гейне и по Коши.

5 Докажите первый замечательный предел.

6 Докажите второй замечательный предел.

7 Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

8 Докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

9 Докажите теорему о достижении непрерывной функцией своих точных граней.

Вопросы и задачи на понимание

1 Может ли быть монотонной последовательностью: а) сумма двух немонотонных последовательностей; б) произведение двух немонотонных последовательностей?

2 Дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности.

3 Может ли быть монотонной последовательностью: а) сумма двух немонотонных последовательностей; б) произведение двух немонотонных последовательностей?

4 Дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности.

5 Как для взаимно однозначной функции получить обратную ей? Как располагаются графики взаимно-обратных функций?

6 Сформулируйте отрицания определений предела функции в точке по Гейне и по Коши.

7 Сформулируйте определения по Коши, соответствующие следующим символическим обозначениям:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; в) ; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

8 Какая связь между односторонними пределами и пределом функции?

9 Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности?

Раздел 3 **Дифференциальное исчисление функции действительной переменной**

Тема 1 Определение производной

1.1 Определение производной, правая и левая производная
1.2 Дифференцируемость функции и дифференциал
1.3 Геометрический и физический смысл производной и дифференциала
1.4 Свойства производных, связанные с арифметическими операциями

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(\delta; x_0)$ точки x_0. Если фиксированное значение аргумента x_0 получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x \in U(\delta; x_0)$, то приращение функции определяется выражением $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначается: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$.

Производная функции $y = f(x)$ в произвольной точке x *обозначается* так: $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

При каждом конкретном числовом значении x производная $f'(x)$ (если она существует при данном x) функции $y = f(x)$ представляет собой определенное число. Значениям переменной x ставятся в соответствие определенные значения переменной $f'(x)$. Поэтому производная является функцией аргумента x.

Если для некоторого значения x предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что функция $y = f(x)$ в точке x имеет *бесконечную производную*.

Если функция $y = f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

то он называется соответственно конечной или бесконечной *производной слева* (*справа*) функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается:

$$f'(x_0 - 0) \text{ или } f'_{-}(x_0) \ \left(f'(x_0 + 0) \text{ или } f'_{+}(x_0) \right).$$

Левая и правая производные называются *односторонними производными*.

Если функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет конечную производную $f'(x_0)$, то существуют производные слева и справа, причем

$$f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0).$$

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке x_0 левую и правую производные, но не имеющие производной в этой точке.

Операция нахождения производной функции f называется *дифференцированием*.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение в этой точке $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где A – некоторое действительное число и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции представимо в виде линейной функции от Δx.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке. Если функция $y = f(x)$ в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке. Обратное верно не всегда, т. е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 еще не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* на $[a;b]$, если она дифференцируема в любой точке $x \in [a;b]$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда, если $f'(x_0) \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x}\right) = 1.$$

Следовательно, при $\Delta x \to 0$ приращение функции $\Delta f(x_0)$ и выражение $f'(x_0)\Delta x$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Поэтому при $\Delta x \to 0$ можно приближенно считать, что $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Дифференциалом функции $f(x)$ называется величина $f'(x_0)\Delta x$, являющаяся *главным* (линейным) членом приращения функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

В частности, если $y = x$, то $y' = 1$, и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Тогда приращение функции можно записать в виде

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x).$$

Видно, что дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

На практике дифференциал используется при приближенных вычислениях следующим образом:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Рассмотрим задачу о проведении касательной к произвольной плоской кривой. Пусть Γ – дуга плоской кривой, M_0 – точка этой кривой, M_0M – секущая (рисунок 1. 1). Если точка M движется по кривой к точке M_0, то секущая поворачивается вокруг точки M_0 и стремится к некоторому предельному положению M_0T.

Касательной к кривой Γ в точке M_0 называется прямая M_0T, которая представляет собой предельное положение секущей M_0M при стремлении по кривой точки M к точке M_0 (рисунок 3.1).

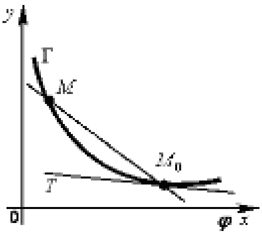


Рисунок 3. 1 – Секущая M_0M
и касательная M_0T

Если предельного положения секущей не существует, то говорят, что в точке M_0 провести касательную нельзя. Это бывает в случае, когда точка M_0 является *точкой излома*, или *заострения*, кривой (рисунок 3. 2*, а, б, в*).

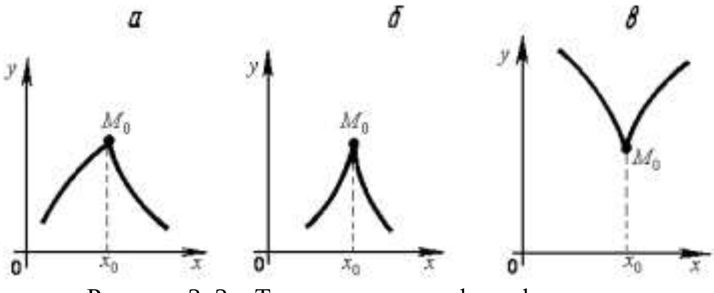


Рисунок 3. 2 – Точки излома графика функции

Пусть кривая Γ является графиком функции $f(x)$ и точка $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right) \in \Gamma$ (рисунок 3. 3).

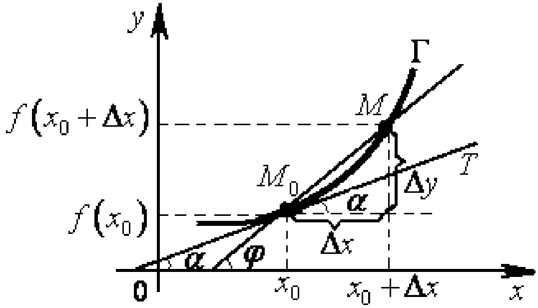


Рисунок 3. 3 – Геометрический смысл касательной

Предположим, что касательная к кривой в точке M_0 существует. Угловой коэффициент секущей M_0M есть

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то точка M движется по кривой к точке M_0 и секущая MM_0 стремится к своему предельному положению M_0T. Таким образом,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{M \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x} = f'\left(x_0\right).$$

Отсюда следует *геометрический смысл производной*: производная от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Так как угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас}}}$, то *уравнение нормали* в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right).$$

Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 изображается приращением ординаты точки касательной, проведенной в $M(x_0; f(x_0))$ к линии $y = f(x)$ (рисунок 3. 4).

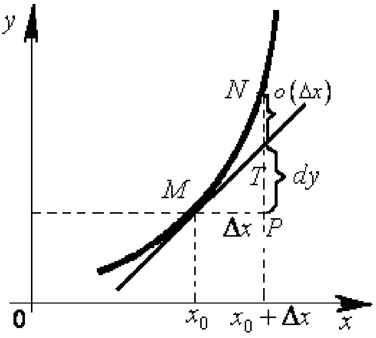


Рисунок 3. 4 – Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную в некоторой окрестности точки x_0. Если аргумент x_0 функции получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит той же окрестности точки x_0, то соответствующее приращение функции равно $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$. Тогда средняя скорость изменения функции равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

а мгновенная скорость ее изменения:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Механический смысл производной: производная – математическая модель мгновенной скорости процесса, описываемого функцией $f(x)$.

В зависимости от содержательной сущности функции можно получить широкий круг математических моделей скорости протекания процессов. Рассмотрим некоторые из них.

1 Пусть материальная точка M движется неравномерно и $y=s(t)$ – функция, устанавливающая зависимость пути от времени t. Мгновенная скорость движения в момент времени t_0 есть производная от пути s по времени t:

$$v=\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $ds=v\Delta t$ равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за промежуток времени Δt, начиная с момента t, если движение на этом участке равномерно со скоростью v. Этот путь отличается от истинного пути Δs на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt: $\Delta s=ds+o(\Delta t)$ при $\Delta t\to 0$.

2 Пусть $y=v(t)$ – функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Мгновенное ускорение материальной точки в фиксированный момент времени t_0 есть производная от скорости v по времени t:

$$v=\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}.$$

3 Пусть $y=Q(T)$ – функция, описывающая процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его до температуры T. Теплоемкость тела есть производная от количества теплоты Q по температуре T:

$$C=\left.\frac{dQ}{dT}\right|_{T=T_0}=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta Q(T_0)}{\Delta T}=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{Q(T_0+\Delta T)-Q(T_0)}{\Delta T}.$$

4 Пусть необходимо определить линейную плотность неоднородного тонкого стержня длиной l, где m – масса стержня, концы которого имеют координаты 0 и x_0 (предполагается, что ось Ox направлена по стержню). Масса стержня является функцией x: $f(x)=m(x)$. Линейная плотность неоднородного тонкого стержня в точке x_0 есть производная от массы m по длине l:

$$\rho(x_0)=\left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}.$$

5 Пусть $y=\Phi(t)$ – функция, описывающая процесс изменения магнитного потока в зависимости от времени t. Мгновенное значение электродвижущей силы индукции равно скорости изменения магнитного потока, т.е. производной от магнитного потока Φ по времени t:

$$\varepsilon = \Phi'(t_0) = \left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)}{\Delta t}$$

6 Пусть $y = q(t)$ – функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t. Сила тока в контуре в момент времени t_0 равна производной заряда q по времени t:

$$I = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, которое бы протекало через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, если бы сила тока была постоянной и равной силе тока в момент времени t. При этом $\Delta q = dq + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

Свойства производных, связанные с арифметическими операциями:

– $(c)' = 0$, $c \in \mathbb{R}$;

– *дифференцирования алгебраической суммы функций*

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

– *дифференцирования произведения функций*

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u;$$

– $(cu)' = c \cdot u'$ $\forall c \in \mathbb{R}$;

– *дифференцирования частного функций*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$$

В таблице 3. 1 приводятся производные и дифференциалы элементарных функций

Таблица 3 .1 – Производные и дифференциалы элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
$y = c$	$y' = 0$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = a^x$	$y' = \alpha^x \ln a$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$	$y = \operatorname{th} x$	$y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{cth} x$	$y' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Тема 2 Производная обратной и сложной функции

2.1 Производная обратной функции
2.2 Производная и дифференциал сложной функции
2.3 Логарифмическая производная

Пусть функция $y = f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$ и имеет во всех точках интервала $(a;b)$ ненулевую производную $y' = f'(x)$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема во всех точках интервала $(f(a); f(b))$ и для любого $y \in (f(a); f(b))$ ее производная равна

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Пусть $y = f(u(x))$ сложная функция. Если функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ имеет в точке x_0 производную и справедлива формула

$$y' = f'_u(u) \cdot u'(x).$$

Функция u называется *промежуточным аргументом*, а x – *основным аргументом*.

Полученное правило распространяется на сложную функцию, зависящую от нескольких аргументов. Предположим, что функции $y = f(u)$, $u = u(v)$, $v = v(t)$, $t = t(x)$ дифференцируемы. Рассмотрим сложную функцию F переменной x через посредство промежуточных функций f, u, v, t:

$$F(x) = f(u(v(t(x)))).$$

Придадим фиксированному значению x приращение Δx. Тогда t получит приращение Δt, v – приращение Δv, u – приращение Δu.

Запишем $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Так как u, v, t дифференцируемы, поэтому и непрерывны, то в силу непрерывности при $\Delta x \to 0$ приращения $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ и $\Delta t \to 0$. Переходя к пределам, имеем

$$F'(x) = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x.$$

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x) > 0 \ \ \forall x \in [a;b]$. Тогда определен логарифм

$$\ln y = \ln f(x).$$

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной x, имеем

$$(\ln y)' = (\ln f(x))'.$$

Отсюда $\frac{y'}{y} = (\ln f(x))'$ и $y' = y \cdot (\ln f(x))'$.

Производная $(\ln f(x))'$ от логарифма функции $f(x)$ называется *логарифмической производной.*

Логарифмическое дифференцирование удобно применять в двух случаях:

– при нахождении производной большого числа сомножителей,

– при нахождении производной степенно-показательной функции.

Тема 3 Производные и дифференциалы высших порядков

3.1 Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

3.2 Производная неявной функции

3.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t \in T \subset \mathbb{R}$. Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы для любого $t \in T$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Кроме этого, будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, которая также дифференцируема. Тогда функцию $y = y(x)$, заданную параметрическими уравнениями, можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, считая t промежуточным аргументом.

Продифференцировав функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, по правилу дифференцирования сложной функции, получим $y'_x = \psi'(t) \cdot t'_x$. Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Учитывая, что $\varphi'(t) = x'_t$, $\psi'(t) = y'_t$, окончательно имеем:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{array}\right.$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема. Если в уравнении $F(x,y)=0$ под переменной y подразумевать функцию $y(x)$, то это уравнение обращается в тождество по аргументу x:

$$F(x,y(x))=0 \quad \forall x\in[a;b].$$

Дифференцируем уравнение по x и считаем, что переменная y есть функция переменной x. Получается новое уравнение, содержащее x, y и y'. Разрешая его относительно y', находим производную функции $y=f(x)$, заданной в неявном виде.

Пусть функция $y=f(x)$ является дифференцируемой. Производная $f'(x)$ является также функцией от x и может быть дифференцируема.

Производная от производной функции $y=f(x)$ называется *производной второго порядка* или *второй производной функции*.

Обозначается: y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной. Пусть $s=s(t)$ – закон движения материальной точки, тогда первая производная определяет скорость движения $v=s'(t)$. Вторая же производная есть скорость изменения скорости движения, т.е. ускорение $a=\dfrac{dv}{dt}=s''(t)$.

Аналогично вводятся производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Производная от производной второго порядка функции $y=f(x)$ называется *производной третьего порядка*.

Обозначается: y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

Аналогично

$$y^{IV}=(y''')'=f^{IV}(x).$$

Производной n-го порядка от функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'=f^{(n)}(x).$$

Пусть y – функция от x, заданная уравнениями $x=\varphi(t)$,

$y = \psi(t)$, где $t \in T \subset \mathbb{R}$.

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к отысканию первой производной от функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, по определению первой производной для функции, заданной параметрическими уравнениями, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y''_x &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Аналогично находится третья производная:

$$\left.\begin{aligned} y'''_x &= \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

и производные высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Найденная производная y'_x содержит, в общем случае, как аргумент x, так и функцию y. По определению вторая производная от функции $y = f(x)$ есть производная от первой производной. Следовательно, для нахождения второй производной, надо продифференцировать найденную первую производную по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. В выражение для второй производной войдут x, y и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'', зависящую только от x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''', y^{IV} и производных более высоких порядков.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ зависит от x и $dx = \Delta x$, причем Δx от x не зависит, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от точки x. Поэтому dx в формуле первого дифференциала будет постоянным. Тогда выражение $f'(x)dx$ зависит только от x и его можно дифференцировать по x.

Дифференциал от дифференциала функции $y=f(x)$ в данной точке x называется *дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* и обозначается d^2y или $d^2f(x)$, т. е. $d^2y=d(dy)$. Полагая dx в формуле $dy=f'(x)dx$ первого дифференциала постоянным, получим:

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))\cdot dx+f'(x)\cdot d(dx)=$$
$$=(f''(x)dx)dx=f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3y=d\left(d^2y\right)$ и он равен:.

$$d^3y=d\left(f''(x)(dx)^2\right)=d\left(f''(x)\right)(dx)^2+f''(x)d\left((dx)^2\right)=$$
$$=(f'''(x)dx)(dx)^2=f'''(x)(dx)^3.$$

Дифференциал n-го порядка (или *n-й дифференциал*) функции $y=f(x)$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^{(n)}y=d\left(d^{(n-1)}y\right)$ и $d^{(n)}y=f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Скобки при степенях dx можно опустить: $d^{(n)}y=f^{(n)}(x)dx^n$.

Отсюда следует, что производная n-го порядка функции $y=f(x)$ есть отношение ее дифференциала n-го порядка к n-й степени дифференциала независимой переменной:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

В частности, при $n=1,2,3$ получим соответственно:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\ f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}.$$

Тема 4 Теоремы о среднем. Правило Лопиталя

4.1 Теорема Ролля
4.2 Теоремы Лагранжа и Коши
4.3 Правило Лопиталя

Одним из важнейших классов (множеств) функций, изучаемых в курсе математического анализа и имеющих первостепенное значение при решении задач практического характера, является класс $C_{[a;b]}$ – непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций. Класс $C^1_{[a;b]}$ дифференцируемых функций является подмножеством множества $C_{[a;b]}$. Дифференцируемые функции представляют особый интерес, так как большинство задач техники и естествознания приводят к исследованию функций, имеющих производную. Также дифференцируемые функции обладают некоторыми общими свойствами, среди которых важную роль играют *теоремы о среднем*. В каждой из этих теорем утверждается существование на отрезке $[a;b]$ такой точки, в которой исследуемая функция $y = f(x)$ обладает тем или иным свойством.

Теорема (Ролля) Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям на отрезке $[a;b]$: $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$; $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$; $f(a)=f(b)$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$, такая, что $f'(\xi)=0$.

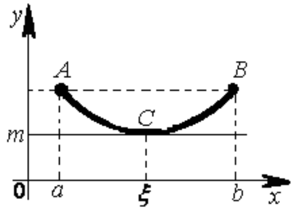


Рисунок 3. 5 – Геометрический смысл теоремы Ролля

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает на концах этого отрезка равные значения, то на графике этой функции найдется хотя бы одна такая точка C с абсциссой $x = \xi$, в которой касательная параллельна оси Ox (рисунок 3. 5).

Физический смысл теоремы Ролля. Пусть x – время, а $f(x)$ – координаты точки, движущейся по прямой, в момент времени x. В начальный момент $x = a$ точка имеет координату $f(a)$, далее движется определенным образом со скоростью $f'(x)$. В момент времени $x=b$ она возвращается в точку с координатой $f(a)$ (так как $f(a)=f(b)$). Ясно, что для возвращения в точку $f(a)$, она должна остановится в некоторый момент времени (прежде чем повернуть назад), т. е. в некоторый момент $x=\xi$ скорость $f'(\xi)=0$.

Теорема (Лагранжа) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Теорема Лагранжа называется также *теоремой о конечных приращениях*, а приведенная формула – *формулой Лагранжа*. Часто используется следующая запись формулы Лагранжа:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \xi \in (a;b).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Выражение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$$

представляет собой угловой коэффициент хорды AB, а $f'(\xi)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $f(x)$ в точке C. Теорема Лагранжа утверждает, что между точками A и B на дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой касательная параллельна хорде AB, при условии, что в каждой точке дуги AB существует касательная (рисунок 3. 6).

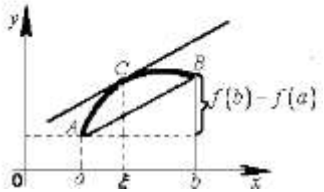


Рисунок 3. 6 – Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Физический смысл теоремы Лагранжа. Пусть x – время, а $f(x)$ – координаты точки, движущейся по прямой, в момент времени x. В выражении

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

величина в левой части равенства является средней скоростью движения точки по прямой за промежуток времени от a до b. Формула Лагранжа показывает, что существует такой момент времени $x=\xi$, в котором мгновенная скорость равна средней скорости на временном отрезке $[a;b]$.

Если в формуле Лагранжа положить $f(a)=f(b)$, получим теорему Ролля, т. е. теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Положим в формуле Лагранжа $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$. Тогда она примет вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0<\theta<1$. Данная формула связывает приращения аргумента и функции, поэтому ее называют *формулой конечных приращений*. Данная формула дает точное выражение приращения функции через вызвавшее его приращение аргумента в отличие от дифференциала функции, который определяет приближенное значение приращения функции: $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$. В приближенных вычислениях приращение функции заменяют чаще дифференциалом, т.е. полагают $\Delta y\approx dy$. Формула Лагранжа применяется реже, так как для ее использования необходимо указать точку $\xi=x_0+\theta\Delta x\in(a;b)$, что, вообще говоря, не всегда удается.

Обобщением теоремы Лагранжа является теорема Коши.

Теорема (Коши) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям: непрерывны на отрезке $[a;b]$; дифференцируемы в интервале $(a;b)$, причем $g'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a;b)$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi\in(a;b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если положить в формуле Коши $g(x)=x$, то все условия теоремы Коши будут выполнены, и формула Коши $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ «перейдет» в формулу Лагранжа

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$. Таким образом, теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

Т е о р е м а (Л о п и т а л я) Пусть функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) определены и дифференцируемы на интервале $(a;b)$*, за исключением, быть может, точки* x_0*, причем* $g(x)\neq 0$ *и* $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a;b)$*;*

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ *(либо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ *(*$+\infty$ *или* $-\infty$*));*

3) существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

Тогда существует также предел отношения функций $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Смысл правила Лопиталя заключается в том, что оно позволяет свести вычисление предела отношения функций в случае неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ к пределу отношения производных, который очень часто вычисляется проще. Правило Лопиталя справедливо также и в случае $x_0=\infty$.

Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ существует, применив дважды правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Правило Лопиталя можно применять до тех пор, пока не будет получена дробь, для которой условия, предусмотренные теоремой, уже не выполняются.

Правило Лопиталя применяется к вычислению пределов в случаях неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а также для раскрытия неопределенностей вида $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$.

Неопределенности вида 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} сводятся к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Для этого необходимо представить выражение $u(x)^{v(x)}$, стоящее под знаком предела как $e^{\ln u(x)^{v(x)}}$.

Тема 5 Формула Тейлора

5.1 Формула Тейлора
5.2 Формула Маклорена

Пусть функция $f(x)$ и n раз дифференцируема в точке x_0.
Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

называется *многочленом Тейлора* для функции $f(x)$.

Теорема (Тейлора) Если функция $y = f(x)$ *определена и* $n+1$ *раз дифференцируема в окрестности* $U(\delta; x_0)$*, то при* $x \to x_0$ *имеет место формула Тейлора*

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ *– остаточный член в форме Лагранжа,* $\xi \in U(\delta; x_0)$.

Если записать $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, то получим

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Остаточный член в формуле Тейлора также записывается в *форме Пеано* $R_{n+1}(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$.

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, то получается *формула Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x).$$

Основные разложения элементарных функций по формуле Маклорена с остаточным членом в виде Лагранжа.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n)}{(n+1)!}(1+\theta)^{k-n-1}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Формула Тейлора широко используется при вычислении пределов, в приближенных вычислениях, при исследовании функции на экстремум, в теории рядов, при вычислении интегралов.

Тема 6 Локальные и глобальные экстремумы функции

6.1 Точки локального и глобального экстремума

6.2 Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции

6.3 Глобальный экстремум функции на отрезке

С помощью производной функции можно произвести полное исследование функции (найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы, точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости, асимптоты графика) и построить график этой функции.

Теорема (*критерий монотонности функции*) *Для того что-*

бы дифференцируемая на $(a;b)$ *функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x)\geq 0$ *(* $f'(x)\leq 0$*) для всех* $x\in(a;b)$. *Если же для любого* $x\in(a;b)$ $f'(x)>0$ *(* $f'(x)<0$*), то функция* f *возрастает (убывает) на этом интервале.*

Геометрический смысл теоремы. Касательная к графику возрастающей на $(a;b)$ функции ($f'(x)>0$) составляет острый угол с осью Ox, касательная к графику убывающей на $(a;b)$ функции, ($f'(x)<0$) образует тупой угол с осью Ox. Если функция $f(x)$ на $(a;b)$ является постоянной $f(x)=C$, $C=\text{const}$, то $f'(x)=0$ и касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x)$ если существует δ-окрестность точки x_0, такая, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ выполняется неравенство (рисунок 3. 7)

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)<0 \; (\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)>0).$$

Значение $f(x_0)$ называется *локальным максимумом (минимумом)* функции и обозначается:

$$\max_{x\cup U(\delta;x_0)} f(x)=f(x_0) \; (\min_{x\cup U(\delta;x_0)} f(x)=f(x_0)).$$

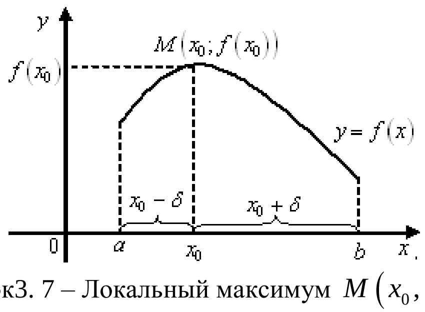


Рисунок3. 7 – Локальный максимум $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

Точки максимума или минимума функции называются *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями.

Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ имеет несколько максимумов и минимумов, то возможен случай, когда максимум функции меньше ее минимума.

Наименьшее и наибольшее значения функции на $[a;b]$ называются *абсолютными минимумом* и *максимумом* или *глобальными экстремумами* функции $f(x)$ и обозначаются:

$$\min_{x\in[a;b]} f(x),\ \max_{x\in[a;b]} f(x).$$

Теорема (необходимое условие экстремума) Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Из теоремы 2 следует, что в точках экстремума функции $f(x)$ касательная к ее графику:

– параллельна оси абсцисс, если существует $f'(x_0)=0$ (рисунок 3. 8, а);

– параллельна оси ординат, если $f'(x_0)$ бесконечна (рисунок 3. 8, б);

– существуют не совпадающие левая и правая касательные, если $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ (рисунок 3. 8, в).

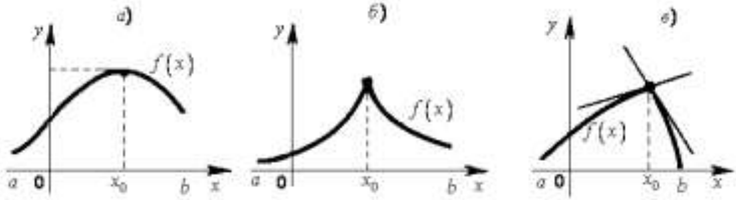


Рисунок 3. 8 – Положение касательной к графику функции в точках экстремума

Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль или не существует, называют *критическими* или *точками возможного экстремума*. Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль, называют *стационарными*.

Критическая точка x_0 называется *угловой точкой* функции

$f(x)$ если $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ (рисунок 3. 8, в). Критическая точка x_0 называется *точкой возврата* функции, если ее левая $f'_-(x_0)$ и правая $f'_+(x_0)$ производные бесконечны (рисунок 3. 8, б).

Не всякая критическая точка функции $f(x)$ является точкой ее локального экстремума.

Теорема (первый достаточный признак существования экстремума функции) Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Теорема (второй достаточный признак существования экстремума функции) Стационарная точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в $U(\delta; x_0)$, является точкой локального минимума $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, и точкой локального максимума, если $f''(x_0) < 0$ (рисунок 3. 9).

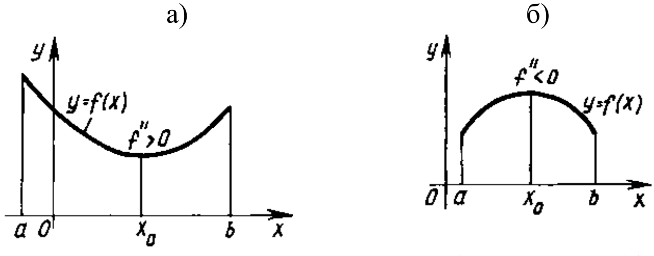


Рисунок 3. 9 – Локальные минимум (а) и максимум (б) функции

Теорема (третий достаточный признак существования экстремума функции) Пусть функция $f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и в этой точке

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума.

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ являются ее глобальные экстремумы, т. е. наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a;b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах этого отрезка или в точках ее локального экстремума. Следовательно, для отыскания глобальных экстремумов $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ функции $f(x)$, надо найти ее значения на концах отрезка $[a;b]$, в точках локального экстремума и выбрать соответственно наименьшее и наибольшее из них.

Если x_1, x_2, ..., x_n – точки локальных экстремумов, то

$$\min_{x\in[a;b]} f(x)=\min\{f(a);\, f(b);\, f(x_1);...;(x_n)\},$$

$$\max_{x\in[a;b]} f(x)=\max\{f(a);\, f(b);\, f(x_1);...;\, f(x_n)\}$$

Тема 7 Исследование функций

7.1 Выпуклость и вогнутость графика функции
7.2 Точки перегиба графика функции
7.3 Асимптоты графика функции
7.4 Общая схема исследования функции

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *вогнутым* на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$ расположена выше любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рисунок 3. 10).

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым* на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$

расположена ниже любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рисунок 3. 11).

Теорема (достаточный признак вогнутости (выпуклости) графика функции) Если функция $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)>0 \quad \forall x\in(a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ вогнутый (выпуклый вниз). Если функция $y=f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)<0 \quad \forall x\in(a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ выпуклый.

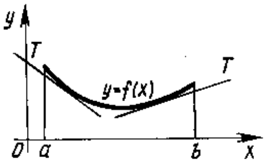


Рисунок 3.10 – Вогнутость графика

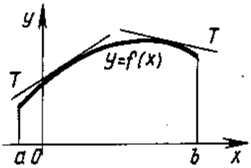


Рисунок 3. 11 – Выпуклость графика

Точка $M(x_0;f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y=f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется *точкой перегиба* (рисунок 3. 12).

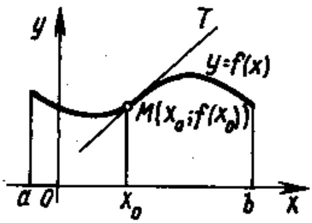


Рисунок 3. 12 – Точка $M(x_0;f(x_0))$ – точка перегиба графика функции

Теорема (необходимое условие точек перегиба) Если функция $f(x)$ имеет в точке $M(x_0;f(x_0))$ перегиб и существует вторая производная $f''(x)$ в точке x_0, то $f''(x_0)=0$.

Обратное утверждение верно не всегда.

Точки $M(x_0;f(x_0))$ графика функции $y=f(x)$ называются *точками возможного перегиба*, если $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба) Если для функции $f(x)$ вторая производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует и при переходе через нее меняет свой знак, то точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такая прямая называют *асимптотой графика*.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} = f(x) \pm \infty \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} = f(x) \pm \infty .$$

Очевидно, что непрерывные на множестве функции вертикальных асимптот не имеют; такие асимптоты существуют только в точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$. Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо определить те значения x, при которых хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Теорема 4 Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x \to \pm\infty} = \frac{f(x)}{x} = k , \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = b .$$

Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой.*

Исследование дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на $D(f)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек) и построение ее графика может быть выполнено по следующей схеме:

1) находится $D(f)$, определяются точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрия;

2) находятся наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции (если они существуют);

3) с помощью первой производной функции определяются стационарные точки и интервалы монотонности;

4) с помощью второй производной определяются интервалы вогнутости и выпуклости графика функции, точки перегиба;

5) находятся локальные экстремумы функции на $D(f)$.

По результатам исследований строится график функции. Если исследуемая функция четная или нечетная, то достаточно исследовать функцию и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения. Иногда для удобства результаты исследования сводятся в таблицу, построение которой приведено в типовом примере 5.

При решении конкретных задач отдельные этапы схемы могут быть расширены, другие же могут оказаться излишними или не выполнимыми.

Тема 8 Построение графиков функций

8.1 Исследование функций, заданных параметрическими уравнениями

8.2 Исследование функций, заданных неявно

8.3 Исследование функций, заданных в полярных координатах

Пусть параметрические уравнения плоской кривой имеют вид

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T .$$

Исследование и построение такой кривой можно провести по следующей схеме:

1) найти множество T – общую часть областей определения функций $x(t)$, $y(t)$ (если множество T не задано). При этом необходимо отметить те значения параметра t_i (включая $t_i = \pm\infty$), для

которых хотя бы один из односторонних $\lim\limits_{t\to t_i\pm 0} x(t)$, $\lim\limits_{t\to t_i\pm 0} y(t)$ равен $+\infty$ или $-\infty$;

2) установить, обладает ли кривая симметрией, позволяющей сократить выкладки;

3) найти нули функций $x(t)$, $y(t)$ и области знакопостоянства этих функций;

4) найти точки t_k, в которых хотя бы одна из производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ равна нулю или разрывна. Заметим, что точки t_i отмеченные в п. 1) и точки t_k, найденные в этом пункте, разбивают множество T на промежутки знакопостоянства производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Поэтому на каждом таком промежутке $(t_p;t_{p+1})$ функция $x(t)$ строго монотонна. Следовательно, система параметрических уравнений на интервале $(t_p;t_{p+1})$ задает параметрически функцию вида $y=f(x)$. Производные этой функции выражаются по формулам

$$y_x^{'}=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},\ y_{xx}^{''}=\frac{\frac{d}{dt}\left(y_x^{'}\right)}{\dot{x}(t)}.$$

Часть кривой, соответствующую изменению параметра t от t_p до t_{p+1} называется *ветвью кривой*. Каждая ветвь кривой является графиком функции вида $y=f(x)$;

5) найти точки t_j, в которых $y_{xx}^{''}=0$;

6) результаты исследования занести в таблицу, аналогичную таблице 3. 2.

Таблица 3. 2 – Результаты исследования графика функции, заданной параметрическими уравнениями

$(t_p;t_{p+1})$		…	
$(x_p;x_{p+1})$		…	
$(y_p;y_{p+1})$		…	
Знак $y_{xx}^{''}$		…	

Здесь в первой строке записываются промежутки изменения параметра t, граничными точками которых t_p и t_{p+1} служат точки, найденные в п. 1), 4) и 5). Во второй и третьей строках таблицы приводятся соответствующие промежутки изменения переменных x и y. В последней строке таблицы указывается знак y''_{xx}, определяющий направление выпуклости графика соответствующей ветви кривой;

7) пользуясь таблицей, построить ветви кривой, соответствующие промежуткам $(t_p; t_{p+1})$.

Замечания. 1 В п. 1) схемы можно найти асимптоты кривой (если они имеются). Для этого надо иметь в виду следующее:

а) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to x_0$, а $y \to \infty$, то $x = x_0$ – вертикальная асимптота кривой;

б) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to \infty$, а $y \to y_0$, то $y = y_0$ – горизонтальная асимптота кривой;

в) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to \infty$ и $y \to \infty$, то возможна наклонная асимптота.

2 Вместо всей области определения T рассматривается только ее неотрицательная часть в следующих случаях:

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = x(t),\ y(-t) = -y(t)$ (симметрия относительно оси Ox);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = -x(t),\ y(-t) = y(t)$ (симметрия относительно оси Oy);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = -x(t),\ y(-t) = -y(t)$ (симметрия относительно начала координат);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = x(t),\ y(-t) = y(t)$ (наложение).

3 Если t_p – точка, найденная в п. 4) схемы, и если на интервале $(t_p; t_{p+1})$ производная $\dot{x}(t)$ сохраняет знак, то на этом интервале система уравнений (8.1) задает параметрически функцию вида $y = f(x)$, для которой точка $x(t_p)$ является точкой возможного экстремума. Является ли $x(t_p)$ точкой экстремума функции $y = f(x)$, можно определить, рассмотрев изменение y на интервалах $(t_{p-1}; t_p)$ и $(t_p; t_{p+1})$.

Если функцию, заданную неявно уравнением

$$F(x;y)=0$$

возможно разрешить относительно одной из переменных, то исследование этой функции проводится обычным образом.

Иногда удается получить параметрические уравнения функции. Для этого положим $y=\alpha(t)x^n$, где $\alpha(t)$ и n – выбранные подходящим образом функция и число.

Подставляя выражение для y в уравнение $F(x;y)=0$, получим

$$F\left(x;\alpha(t)x^n\right)=0 .$$

Пусть $x=\varphi(t)$ – решение этого уравнения. Тогда

$$x=\varphi(t),\ y=\alpha(t)\varphi^n(t)=\psi(t)$$

есть параметрические уравнения кривой.

На практике выбор функции $\alpha(t)$ определяется видом функции $F(x;y)$.

Пусть в полярной системе координат $(\varphi;r)$ кривая задана уравнением $r=r(\varphi)$.

В полярных координатах прямая, задаваемая уравнением

$$r=\frac{d}{\sin(\varphi-\varphi_0)},\ d\neq 0,$$

является асимптотой графика функции $r(\varphi)$, если выполнены следующие условия:

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)=+\infty ,$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0)=d ,\ d\neq 0.$$

Тогда, выражая декартовы координаты через полярные:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$$

получим параметрические уравнения кривой (φ – параметр):

$$x=r(\varphi)\cos\varphi ,$$

$$y=r(\varphi)\sin\varphi .$$

Тема 9 Векторные функции

9.1 Годограф векторной функции

9.2 Производная и дифференциал векторной функции

9.3 Длина кривой

9.4 Натуральное уравнение гладкой кривой и уравнение нормальной плоскости

Векторной функцией действительного аргумента (*вектор-функцией скалярного аргумента*) называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in T \subset \mathbb{R}$ ставит в соответствие один и только один вектор $\vec{a}$ трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. *Обозначается*: $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $t \in T$.

Вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ имеет определенную длину (модуль) и определенное направление в каждой точке t.

Выберем общую точку приложения O векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$. При непрерывном изменении аргумента t конец вектора $\vec{a} = \vec{a}(t)$ описывает некоторую линию Γ. Линия Γ, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{a}$ при непрерывном изменении аргумента $t \in T \subset \mathbb{R}$, называется *годографом* вектор-функции скалярного аргумента $\vec{a}(t)$ (рисунок 3. 13).

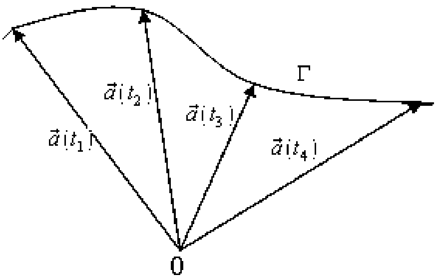


Рисунок 3. 13 – Годограф вектор-функции

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве материальной точки, а всякую линию Γ, в пространстве как годограф некоторой вектор-функции.

З а м е ч а н и я . 1 Если вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ изменяется только по длине, а его направление остается постоянным, то $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ есть множество связанных векторов, расположенных на луче, выходящем из точки O . Годографом такой вектор-функции является луч Γ (рисунок 3. 14), если $T = \mathbb{R}$.

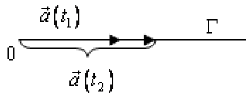


Рисунок 3. 14 – Годограф вектор-функции, изменяющейся только по длине

2 Если при изменении t модули векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$ не меняются, а изменяется только направление, то векторы из множества $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ будут находиться в шаре радиусом $|\vec{a}(t)|$ с центром в точке O . Годографом такой функции является линия, принадлежащая сфере радиусом $|\vec{a}(t)|$ (рисунок 3. 15).

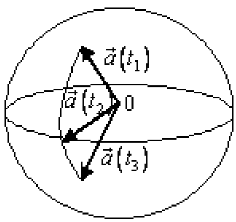


Рисунок 3. 15 – Годограф вектор-функции, изменяющейся только по направлению

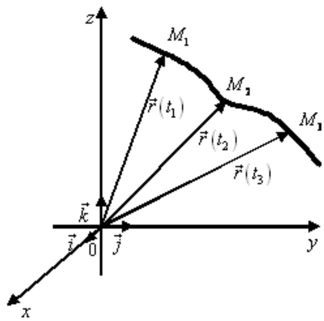


Рисунок 3. 16 – Радиус-векторы

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Тогда задание вектор-функции означает задание координат вектора $\vec{a}(t)$. Если начало вектора $\vec{a}(t)$ совпадает с точкой O , то $\vec{a} = \vec{a}(t)$ называется *радиусом-вектором* точки M и обозначается $\vec{r}(t)$ (рисунок 3. 16).

Любой радиус-вектор $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ пространства $\mathbb{R}^3$ задается своими координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (координаты вектора совпадают с координатами точки $M \in \Gamma$ (рисунок 3.16)) и может быть разложен по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\ .$$

Так как каждой упорядоченной тройке чисел x, y, z соответствует единственный радиус-вектор $\vec{r}=\vec{r}(t)$, то задание вектор - функции эквивалентно заданию трех числовых функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$$

где $t\in T$.

Поэтому исследование векторной функции скалярного аргумента сводится к исследованию трех координатных функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, определенных на множестве T . В координатной форме вектор-функция запишется в виде $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$.

Вектор $\vec{a}$ называется *пределом* вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t\in T$, в точке $t=t_0$ (или $t\to t_0$), если $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-a\right|=0$.

Обозначается: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$.

Выражение $\left|\vec{r}(t)-a\right|$ задает числовую функцию. Следовательно, понятие предела вектор-функции сводится к понятию предела скалярной функции. Поэтому можно записать:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a} \ \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta>0: \ \forall t\in U(t_0;\delta)\Rightarrow \left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon .$$

Пусть $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$ и $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$. Для того, чтобы $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$, необходимо достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=a_1,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=a_2,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=a_3 .$$

Отсюда следует равенство:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\lim_{t\to t_0}x(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0}y(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_0}z(t)\vec{k}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\ .$$

Таким образом, для того чтобы вычислить предел вектор-функции, достаточно найти соответствующие пределы координат этой функции. Если хотя бы один из пределов координат функции $\vec{r}(t)$ не существует, то не существует и $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$.

Геометрический смысл предела вектор-функции: если начало всех векторов $\{\ \vec{r}(t) \mid \ t \in T\}$ поместить в одну точку, то условие $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$ означает, что концы всех векторов $\vec{r}(t)$ при $t \in U(t_0;\delta)$ лежат в шаре радиуса ε с центром в конце вектора $\vec{a}$ (рисунок 3. 17)

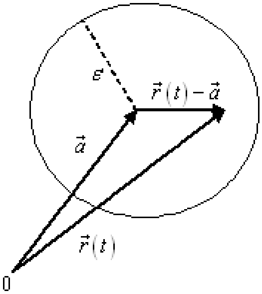


Рисунок 3. 17 – Геометрический смысл предела вектор-функции

Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t \in T$, называется *непрерывной* в точке $t = t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Очевидно, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны ее координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Введем понятие производной вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t \in T$ в данной точке t_0. Для этого дадим аргументу t_0 приращение $\Delta t \neq 0$ и рассмотрим вектор $\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$. Составим отношение

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Если существует предел отношения приращения $\Delta\vec{r}(t_0)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 к приращению скалярного аргумента Δt при $\Delta t \to 0$, то этот предел называется *производной вектор-функции* $\vec{r}(t)$ в точке t_0:

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Так как

$$\Delta\vec{r}(t_0) = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]\vec{i} + [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]\vec{j} + [z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)]\vec{k} =$$

$$= \Delta x(t_0)\vec{i} + \Delta y(t_0)\vec{j} + \Delta z(t_0)\vec{k} ,$$

то по определению получим

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k} .$$

Итак, вычисление производных от векторной функции скалярного аргумента в точке t_0 сводится к вычислению производных ее координат.

Дифференцируемые векторные функции обладают следующими свойствами:

– если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке;

– если векторная функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она имеет в этой точке производную и $\vec{r}'(t_0) = \vec{a}$;

– векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке;

– если $t = t(\tau)$ – дифференцируемая в точке τ_0 скалярная функция, $\vec{r}(t)$ – дифференцируемая в точке $t_0 = t(\tau_0)$ векторная функция, то

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} ;$$

– для произвольных векторных функций имеют место формулы;

$$(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \pm \vec{r}_2',$$

$$(f \cdot \vec{r})' = f' \cdot \vec{r} + f \cdot \vec{r}' ,$$

$$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2',$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2' .$$

– если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и векторы $\vec{r}(t)$ имеют одинаковую длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $\vec{r}'(t_0)$ ортогональна вектору $\vec{r}(t_0)$:

$$\vec{r}'(t_0) \cdot r(t_0) = 0 ;$$

– если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке этого отрезка, то существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \le |\vec{r}'(\xi)| \cdot (b - a).$$

С *геометрической* точки зрения производная вектор-функции в точке t_0 есть вектор $\vec{r}\,'(t_0)$, направленный по касательной к годографу этой функции в сторону возрастания параметра t.

Механический смысл производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}\,'(t_0)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции.

Производная вектор-функции $\vec{r}(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и ее также можно дифференцировать.

Производная функции $\vec{r}\,'(t)$ точке $t = t_0$ называется *второй производной* вектор-функции $r(t)$ по скалярному аргументу t в точке t_0 и обозначается так: $\vec{r}\,''(t_0)$, $\dfrac{d^2\vec{r}(t_0)}{dt^2}$, $\left.\dfrac{d\vec{r}\,'(t_0)}{dt}\right|_{t=t_0}$, $\ddot{r}(t_0)$.

Вектор $\vec{a}(t_0)$, равный производной скорости $\vec{v}(t)$ по времени t в момент t_0, называется *ускорением*: $\vec{r}\,''(t_0) = \dfrac{d\vec{v}(t_0)}{dt} = \vec{a}(t_0)$.

Механический смысл второй производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}\,''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени t_0.

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. И пусть на отрезке $[a;b] \subset \mathbb{R}$ заданы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Тогда говорят, что задано непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в $\mathbb{R}^3$.

Числа $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ можно рассматривать как координаты точки $M = M(t)$ или как координаты радиус-вектора $\vec{r}(t)$ с началом в точке O и концом в точке M (рисунок 3. 18):

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)),\ t \in [a;b] \subset \mathbb{R}.$$

Непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в пространство $\mathbb{R}^3$ называется *кривой* и обозначается $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ a \le t \le b \right\}$.

Множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, на которое отображается отрезок $[a;b]$, называется *носителем* кривой Γ, переменная t называется *параметром* на кривой Γ.

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*.

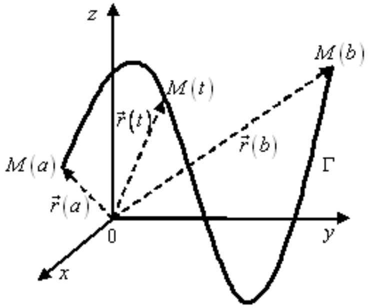


Рисунок 3.18 – Кривая Γ в пространстве $\mathbb{R}^3$

Кривая может быть задана:

– *явно*: непрерывная функция $y = f(x)$, $a \le x \le b$, задает плоскую кривую $\Gamma = \{y = f(x) |\ a \le x \le b\}$, носителем является график функции $f(x)$, параметром – переменная x;

– *неявно*: координаты всех точек носителя плоской кривой Γ удовлетворяют уравнению $F(x; y) = 0$;

– *в координатной форме*: $\Gamma = \{x(t); y(t); z(t) |\ a \le t \le b\}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координатные функции отображения $M(t)$, $t \in [a;b] \subset \mathbb{R}$;

– *векторное представление*: $\Gamma = \{ \vec{r}(t) |\ a \le t \le b \}$, где $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ – вектор-функция.

Если для точек кривой $\Gamma = \{ M(t) \in \mathbb{R}^3 |\ a \le t \le b\}$ выполняется условие $\forall t_1 < t_2 \quad M(t_1)$ предшествует $M(t_2)$, то такая кривая называется *ориентированной*.

Точка носителя кривой, в которую при отображении $\Gamma = \{ M(t) \in \mathbb{R}^3 |\ a \le t \le b \}$ отображаются хотя бы две разные точки отрезка $[a;b]$, называется *точкой самопересечения* (*кратной точкой*) кривой Γ.

Если носитель кривой Γ не имеет кратных точек (отображение

$\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^3 \middle| \ a \le t \le b \right\}$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a;b]$ в точки пространства $\mathbb{R}^3$), то кривая называется *простой дугой*.

Если $M_0 = M(a)$ и $M_1 = M(b)$, то точка $(M_0;a)$ называется *началом* кривой Γ, а точка $(M_1;b)$ – *концом* данной кривой. Если $M(a) = M(b)$, то кривая Γ называется *замкнутой*.

Простым замкнутым контуром называется замкнутая кривая, у носителя которой нет кратных точек, кроме носителя ее начала и конца.

Если $t_1, t_2 \in [a;b]$, $t_1 < t_2$, то кривая $\Gamma = \left\{ M(t) \middle| \ t_1 \le t \le t_2 \right\}$ называется *частью кривой* Γ или *простой дугой* $M(t_1)M(t_2)$ с началом в точке $M(t_1)$ и концом в точке $M(t_2)$.

Прямая проходящая через точку M_0 в направлении вектора $\vec{r}'(t_0)$, называется *касательной* к кривой Γ в точке $M(t_0)$.

Поместим начало вектора $\vec{r}'(t_0)$ в точку $M(t_0)$. Направление данного вектора совпадает с направлением касательной. Поэтому уравнение касательной в векторной форме запишется в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0) \cdot \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор касательной.

В координатной форме уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0) \cdot \lambda$ примет вид

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + \lambda \cdot x'(t_0), \\ y &= y(t_0) + \lambda \cdot y'(t_0), \\ z &= z(t_0) + \lambda \cdot z'(t_0), \end{aligned}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Выражая параметр λ, получим уравнение касательной в канонической форме:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Если функция $\vec{r}'(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется *непрерывно дифференцируемой* кривой. Если векторная функция $\vec{r}(t)$ n раз дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется n *раз дифференцируемой* кривой.

Точка кривой Γ, в которой $\vec{r}\,'(t_0) \neq 0$, называется *неособой*, а точка, в которой $\vec{r}\,'(t_0) = 0$ – *особой*.

Пусть $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$. Тогда $\vec{r}\,'(t) = (x'(t); y'(t); z'(t))$. Поэтому точка M_0 является неособой точкой кривой Γ тогда и только тогда, когда

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 .$$

Из определения неособой точки следует, что во всякой неособой точке кривой Г существует касательная.

Гладкой кривой называется кривая, которая является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек. Если кривая составлена из конечного числа гладких кривых, то такая кривая называется *кусочно-гладкой*.

Для отрезка $[a;b]$ система $\tau_n = \{t_k\}$, $k = 0,1,..., n$, точек t_k, таких, что $a = t_0 < t_1 < ...t_{n-1} < t_n = b$, называется *разбиением* отрезка $[a;b]$. Соответствующий набор точек $M_k = M(t_k)$, $k = 0,1,..., n$, где $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t_k)$ называется *разбиением* кривой Γ.

Соединив последовательно точки M_0, M_1, ..., M_n, отрезками M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$ получим ломаную P_n, которая называется *вписанной* в кривую Γ; отрезки $M_{k-1}M_k$, $k = 0,1,..., n$ называются *звеньями* ломаной P_n, а точки ломаной $M_k = M(t_k)$ – *вершинами* ломаной. Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$. Тогда длина всей ломаной P_n равна

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| .$$

Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется *длиной* кривой:

$$L_\Gamma = \sup_{\tau_n} \sigma_n ,$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $\tau_n = \{t_k\}$, $k = 0,1,..., n$, отрезка $[a;b]$.

Если $0 \le L_\Gamma < +\infty$, то кривая Г называется *спрямляемой*.

Теорема (о длине дуги) Если кривая $\Gamma = \{\, x(t); y(t); z(t) |\ a \le t \le b \}$ *непрерывно дифференцируема, то* *переменная длина дуги* $l = l(t)$, *отсчитываемая от начала кривой* Γ, *является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t *и*

$$\frac{dl}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ .$$

Поскольку $l'(t) = \dfrac{dl}{dt}$, то отсюда *дифференциал длины дуги* равен

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\ .$$

Пусть кривая $\Gamma = \{\,\vec{r}\,(t)|\ \ a \le t \le b\}$ гладкая кривая. В силу теоремы 2 переменная длина дуги $l = l(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ, является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a;b]$: $l'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$. Так как $l(a) = 0$ и $l(b) = L_\Gamma$, то обратная функция $t = t(l)$ однозначна, строго возрастает, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;L_\Gamma]$. По теореме об обратной функции имеем

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} > 0\ .$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой Γ ее параметр t является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины l, производная этой функции нигде не обращается в нуль.

Следовательно, функция $t = t(l)$ является допустимым преобразованием параметра и уравнение кривой Γ можно записать в виде $\vec{r} = \vec{r}(t(l))$, $l \in [0;L_\Gamma]$.

Если параметром кривой Γ является переменная длина ее дуги l, то l называется *натуральным параметром*, а уравнение кривой $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}\,(l)|\ \ 0 \le l \le L_\Gamma\}$ называется *натуральным уравнением* кривой.

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) | \ a \le t \le b\}$ гладкая, а $l = l(t)$ – переменная длина ее дуги. Тогда $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ является единичным касательным к кривой Γ вектором и $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dl}\right| = 1$.

Отсюда следует, что если α, β, γ – углы, образованные вектором касательной $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ к кривой Γ с осями Ox, Oy, Oz соответственно, то $\dfrac{d\vec{r}}{dl} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Нормальной плоскостью к кривой Γ называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и проходящая через точку касания.

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка касания (рисунок 3. 19). Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости α, проходящей через эту точку, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости.

Из определения нормальной плоскости следует, что векторы $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{r}\,'(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ коллинеарные, поэтому можно положить $A = x'(t_0)$, $B = y'(t_0)$, $C = z'(t_0)$. Тогда искомое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(z - z_0) = 0.$$

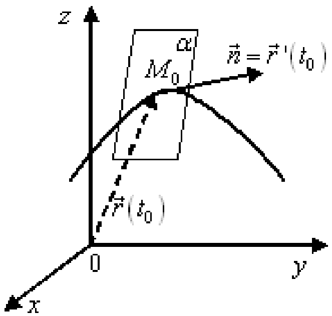


Рисунок 3.19 – Нормальная плоскость α к кривой Γ

Тема 10 Кривизна кривой

Одной из важных характеристик кривой является мера ее изогнутости – *кривизна*.

Например, о двух плоских кривых $ACB \subset \Gamma_1$ и $ADB \subset \Gamma_2$ (рисунок 3. 20) можно сказать, что кривая Γ_2 более изогнута, чем Γ_1.

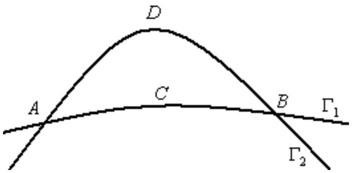


Рисунок 3.20 – Кривые Γ_1 и Γ_2

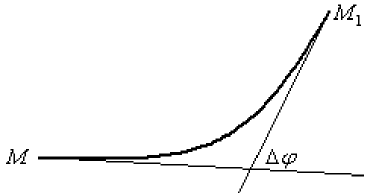


Рисунок 3.21 – Угол смежности

Однако для того, чтобы строго оценить степень изогнутости плоской линии, необходимо ввести количественную характеристику ее изогнутости (кривизны).

Рассмотрим на кривой точки M и M_1. Проведем в этих точках касательные к кривой. При переходе по кривой из точки M в точку M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$, который называется *углом смежности* (рисунок 3.21).

Отношение угла смежности дуги к ее длине называется *средней кривизной дуги:* $K_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Средняя кривизна характеризует среднюю изогнутость кривой на всей дуге. На отдельных участках кривой кривизна может значительно отличаться от средней. Чтобы избежать такой неопределенности, вводится количественная мера изогнутости кривой в точке M. Эта характеристика основана на том, что чем меньше дуга Γ (рисунок 3. 21), тем лучше средняя кривизна характеризует изогнутость линии вблизи точки M.

Кривизной K линии Γ в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна $K_{\text{ср}}$ дуги MM_1 линии Γ при стремлении точки M_1 к точке M :

$$K = \lim_{M_1 \to M} K_{\text{ср}} = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \right|.$$

Пусть кривая Γ является годографом дважды дифференцируемой *векторной функции* действительного аргумента $\Gamma = \left\{ \vec{r}\,(t) \middle| \; a \le t \le b \right\}$. Тогда кривизна кривой Γ вычисляется по формуле

$$K = \frac{\left| \vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' \right|}{\left| \vec{r}\,'^{3} \right|}.$$

Если гладкая кривая Γ задана *параметрическими уравнениями*

$$\Gamma = \left\{ x(t); y(t); z(t) \middle| \; a \le t \le b \right\},$$

то кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{\sqrt{\left(y'z'' - y''z'\right)^2 + \left(z'x'' - z''x'\right)^2 + \left(x'y'' - x''y'\right)^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если кривая Γ задана в *плоскости Oxy* уравнением $y = f(x)$, то формула для вычисления ее кривизны получается из формулы вычисления кривизны, положив в ней $t = x$, $z = 0$. Тогда уравнение линии Γ можно записать в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} y &= f(x), \\ t &= x. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$\left| \vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' \right| = \sqrt{0 + 0 + \left(1 \cdot y'' - 0\right)^2} = \left| y'' \right| \text{ и } \left| \vec{r}\,' \right| = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Значит,

$$K = \frac{\left| y'' \right|}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}.$$

Если кривая Γ задана в плоскости Oxy *неявно* уравнением $F(x; y) = 0$, то кривизна вычисляется по формуле

$$K=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x\\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y\\ F'_x & F'_y & 0\end{pmatrix}\right|}{\left(F'^2_x+F'^2_y\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если кривая Γ задана в плоскости Oxy в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, то кривизна находится по формуле

$$K=\frac{\left|r^2+2r'^2-r\cdot r''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Проведем к кривой Γ нормаль в точке $M(x;y)$ и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок $MN=R$ (рисунок 3. 22), по величине обратный кривизне K: $R=\dfrac{1}{K}$.

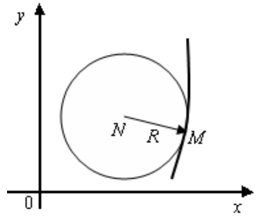


Рисунок 3. 22 – Радиус кривизны MN

Отрезок MN называется *радиусом кривизны*, точка N – *центром кривизны*, а круг с центром в точке N и радиусом R – *кругом кривизны кривой* в точке $M(x;y)$.

Если кривая Γ задана *в декартовой системе* координат Oxy уравнением $y=f(x)$, то ее радиус кривизны находится по формуле:

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}.$$

Если кривая Γ в плоскости Oxy задана *параметрическими уравнениями*, то ее радиус кривизны определяется по формуле:

$$R = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''x' - y'x''\right|}.$$

Если Γ – годограф вектор-функции $r = r(t)$, то:

$$R = \frac{\left|\vec{r}'\right|^3}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|}.$$

Из определения центра кривизны следует, что каждой точке M кривой Γ, соответствует точка N – центр кривизны кривой Γ' в точке M.

Множество точек Γ' центров кривизны линии Γ называется ее *эволютой*, а сама линия Γ по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой.*

Пусть кривая Γ задана уравнением $\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j}$ в плоскости Oxy. Пусть $N(\xi;\eta)$ – центр кривизны линии Γ в точке M (рисунок 3.23).

Тогда для любой точки $M(x;y) \in \Gamma$ имеем $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$. Обозначим $\overrightarrow{ON} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, $\overrightarrow{MN} = R\cdot\vec{n}^0$, где $\vec{n}^0$ – единичный вектор нормали кривой Γ.

Тогда

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + R\vec{n}^0.$$

Данное уравнение называется *векторным уравнением эволюты кривой* Γ.

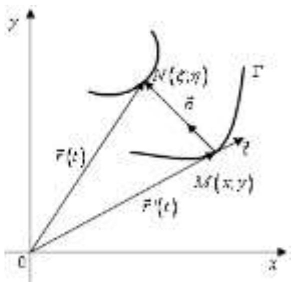


Рисунок 3. 23 – Эволюта и эвольвента

Запишем разложения векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ по базису $B = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$:

$$r_1 = \xi\cdot\vec{i} + \eta\cdot\vec{j},$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

Найдем вектор $\vec{n}^0$.

Единичный вектор касательной к кривой Γ есть

$$\vec{\tau}^0 = \frac{r'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{x'\cdot\vec{i} + y' \cdot \vec{j}}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{j}.$$

Продифференцируем равенство $\vec{\tau}^{0^2} = 1$ по t. Имеем

$$2\vec{\tau}^0 = \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = 0.$$

Отсюда $\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} \perp \vec{\tau}^0$. Таким образом, вектор нормали $\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}^0}{dt}$.

Координаты вектора $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'\vec{i} + \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'\vec{j} =$$

$$= -y'\frac{x'y''+y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec{i} + x'\frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec{j}.$$

Тогда $\vec{n}^0 = \mp\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{i} \pm \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{j}$.

Подставим $\vec{n}^0$ и $R = \frac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{|y''x'-y'x''|}$ в векторное уравнение эволюты $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t) + R \cdot \vec{n}^0$:

$$\xi \cdot \vec{i} + \eta \cdot \vec{j} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} - y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}\vec{i} + x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}\vec{j}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях выражения, получим:

$$\xi = x - y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}, \ \eta = y + x'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}.$$

Данные формулы являются параметрическими уравнениями эволюты Γ' кривой $\Gamma = \{x(t); y(t); z = 0 |\ 0 \le t \le T\}$. Сама же кривая Γ является эвольвентой по отношению к кривой Γ'.

Свойства эволюты и эвольвенты, устанавливающие связь между ними:

– нормаль к эвольвенте Γ является касательной к эволюте в соответствующей точке;

– если на некотором участке эвольвенты радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение радиуса кривизны на этом участке равно по абсолютной величине длине дуги соответствующего участка эволюты.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Сформулируйте определение производной.

2 Что называется правой и левой производной?

3 Какая функция называется дифференцируемой в точке x_0 ?

4 Что называется дифференциалом функции в точке?

5 Что называется логарифмической производной?

6 Дайте определение второй производной функции в точке.

7 Дайте определение дифференциала n- го порядка:

8 а) если x независимая переменная;

9 б) если x зависимая переменная.

10 Что называется многочленом Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0 ?

11 Какая точка называется точкой локального экстремума?

12 Какая точка называется точкой абсолютного экстремума?

13 Какой график функции называется выпуклым, вогнутым?

14 Какая точка графика называется точкой перегиба?

15 Какая прямая называется вертикальной (наклонной, горизонтальной) асимптотой?Дайте определение векторной функции и годографа.

16 Дайте определение предела и непрерывности векторной функции.

17 Дайте определение производной векторной функции.

18 Какая вектор-функция называется дифференцируемой?

19 Что называется дифференциалом векторной функции?

20 Дайте определение кривой, кривизны и радиуса кривизны кривой.

21 Дайте определение радиуса, круга и центра кривизны плоской кривой.

22 Что называется эволютой и эвольвентой плоской кривой?

Формулировки теорем и формулы

11 Сформулируйте правила нахождения производной постоянной функции, производной суммы и разности функций, производной произведения функций, производной частного функций

12 Как найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями?

13 Как найти производную неявной функции?

14 Какой вид имеет формула Маклорена?

15 Запишите основные разложения по формуле Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

16 Какие условия должны выполнятся, чтобы функция: а) возрастала, б) убывала, в) была неубывающей и невозрастающей?

17 Сформулируйте достаточные условия экстремума.

18 Как находится глобальный экстремум функции на отрезке?

19 Перечислите основные этапы исследования функции.

20 Как найти асимптоты графика функции, заданной параметрическими уравнениями?

21 Как исследовать и использовать симметрию функции, заданной параметрическими уравнениями?

22 Сформулируйте необходимое условие локального экстремума функции, заданной параметрическими уравнениями.

23 Приведите примерную схему исследования функции, заданной параметрическими уравнениями.

24 Как исследовать функцию, заданную неявно?

25 Как исследовать функцию, заданную в полярных координатах**?**

26 Перечислите свойства предела вектор-функции.

27 Чему равен дифференциал дуги?

28 Какое уравнение называется натуральным уравнением гладкой кривой?

29 Чему равна длина единичного вектора касательной? Какие координаты он имеет?

30 Как вычисляется кривизна в случаях векторного, параметрического представления кривой?

Доказательство теорем

3 Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании обратной функции?

4 Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании сложной функции.

5 Сформулируйте и докажите теорему Ролля.

6 Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.

7 Сформулируйте и докажите теорему Коши.

8 Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя.

9 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом: а) в виде Лагранжа; б) в виде Пеано.

10 Сформулируйте и докажите необходимое условие локального экстремума.

11 Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости и вогнутости.

12 Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условия точки перегиба.

Вопросы и задачи на понимание

4 При нахождении производных каких функций желательно использовать логарифмическую производную?

5 В чем состоит геометрический смысл производной?

6 Какая связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной?

7 В чем состоит геометрический смысл дифференциала.

8 Где используются понятия производной и дифференциала в физике?

9 Может ли существовать вторая производная $f''(x_0)$, если не существует первая? Приведите пример функции, у которой существует $f'(x_0)$, но не существует $f''(x_0)$.

10 В чем состоит геометрический и физический смысл теоремы Ролля.

11 Почему формула Лагранжа называется формулой конечных приращений?

12 В чем состоит геометрический и физический смысл теоремы Лагранжа?

13 При раскрытии каких неопределенностей используется правило Лопиталя?

14 Справедливо ли правило Лопиталя в случае $x_0 = \infty$?

15 Можно ли применять правило Лопиталя несколько раз?

16 В чем состоит геометрический и физический смысл производной вектор-функции?

Раздел 4 **Интегральное исчисление функции действительной переменной**

Тема 1 Первообразная и неопределенный интеграл

1.1 Определение первообразной функции
1.2 Неопределенный интеграл и его геометрический смысл
1.3 Основные свойства неопределенного интеграла
1.4 Таблица неопределенных интегралов

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной $f'(x)$ или дифференциала $df = f'(x)dx$ функции $f(x)$. В интегральном исчислении решается обратная задача: по заданной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Таким образом, *основной задачей интегрального исчисления* является восстановление функции $F(x)$ по известной производной или дифференциалу этой функции. Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т. д.

Функция $F(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и имеет место соотношение:

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx.$$

Любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то все первообразные этой функции определяются выражением $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Операция отыскания первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется *интегрированием*.

Совокупность $F(x) + C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ .$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной* функцией, x – *переменной интегрирования*, а C – *постоянной интегрирования*.

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y = F(x) + C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: *все касательные к кривым в точках с абсциссой* $x = x_0$ *параллельны между собой*:

$$\left(F(x) + C\right)'\Big|_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0).$$

На рисунке 4. 1 изображен неопределенный интеграл $x^2 + C$ от функции $f(x) = 2x$:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C\ ,$$

который представляет собой семейство парабол $\left\{\ y = x^2 + C\ \right\}$.

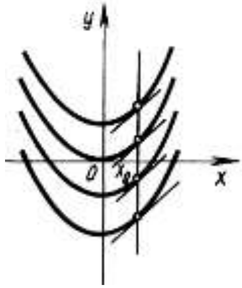


Рисунок 4. 1 – Интегральные кривые $\left\{\ F(x) + C\ \right\}$

Кривые семейства $\left\{\ F(x) + C\ \right\}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси Oy .

Неопределенный интеграл обладает *свойствами*:

– производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

– неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

– постоянный множитель $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

– неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f_1(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \right) dx = \int f_1(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx;$$

– (*инвариантность формул интегрирования*) любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ или } \int f(u)du = F(u) + C,$$

где u – дифференцируемая функция.

Каждая из нижеследующих формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции:

1 $\quad \int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$

2 $\quad \int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$

3 $\quad \int e^u du = e^u + C.$

4 $\quad \int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

5 $\quad \int \sin u du = -\cos u + C.$

6 $\int \cos u du = \sin u + C$.

7 $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8 $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

9 $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$.

10 $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$.

11 $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.

12 $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$.

13 $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$, $a \neq 0$.

14 $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-u}{a+u} \right| + C$, $a \neq 0$.

15 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$, $|u| > |a|$, $a \neq 0$.

16 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$, $|u| < |a|$, $a \neq 0$.

17 $\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$, $a \neq 0$

18 $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$, $a \neq 0$

Некоторые из приведенных формул таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются дифференцированием их правых частей.

Если первообразная $F(x)$ функция $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл* $\int f(x)dx$ *выражается в элементарных функциях или функция* $f(x)$ *интегрируема в конечном виде*. Однако не всякий интеграл от элементарной функции выражается в элементарных функциях. Используя основные правила интегрирования, можно находить интегралы от более сложных функций.

В отличие от дифференциального исчисления, где, пользуясь таблицей производных, можно найти производную или дифференциал любой заданной функции, в интегральном исчислении нет общих приемов вычисления неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие свести данный интеграл к табличному.

Тема 2 Общие методы интегрирования

2.1 Непосредственное интегрирование
2.2 Метод замены переменной (подстановка)
2.3 Метод интегрирования по частям

Вычисление интегралов, основанное на приведении подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла, называется *непосредственным интегрированием*.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

Теорема (замена переменной) Пусть функция $x=\varphi(t)$ *определена и дифференцируема на некотором множестве* T *. И пусть* X *– множество значений функции* $x=\varphi(t)$*, на котором определена функция* $f(x)$*. Тогда если на множестве* X *функция* $f(x)$ *имеет первообразную, то на множестве* T *справедлива формула замены переменной:*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Суть метода замены переменной состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, учитывая $dx=\varphi'(t)dt$.

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют *«подведением» множителя* $\varphi'(x)$ *под знак диффе-*

ренциала. Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x)=u$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du.$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляют непосредственным интегрированием.

Вычисление некоторых типов неопределенных интегралов основывается на теореме 2.

Теорема 2 (интегрирование по частям) Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *– две дифференцируемые функции переменной* x *на промежутке* X. *И пусть функция* $u'(x)v(x)$ *имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция* $v'(x)u(x)$ *также имеет производную и справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

С помощью формулы интегрирования по частям отыскание интеграла $\int udv$ сводится к вычислению другого интеграла $\int vdu$. Применять ее целесообразно, когда интеграл $\int vdu$ более прост для вычисления, чем исходный.

Методом интегрирования по частям вычисляются интегралы:

– $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in$ □ , $k\in$ □ . Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u=P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям n раз;

– $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,xdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in\mathbf{N}$. Данные интегралы вычисляются по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$;

– $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a, $b \in \mathbb{R}$. Они вычисляются двукратным интегрированием по частям и решением уравнения относительно искомого интеграла.

Тема 3 Интегрирование рациональных функций

3.1 Интегрирование простейших рациональных дробей
3.2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби
3.3 Интегрирование рациональных функций

Рациональной дробью $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m},\ n,\ m\in\mathbb{N}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$), то дробь называется *неправильной*. Если степень $n<m$, то дробь называется *правильной*.

Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n \geq 2)$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \geq 2)$.

Здесь A, a, p, q, M, N – действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

Интегрирование простейших дробей видов 1-3 проводится с помощью несложных преобразований и подстановок. Для вычисления интеграла вида 4 используется рекуррентная формула

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}=M\,I_0+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n,$$

где

$$I_0 = \int \frac{tdt}{\left(t^2 + a^2\right)^n} = \frac{1}{2(1-n)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}} + C\,,$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Правильную рациональную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где

$$Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \left(x^2 + px + q\right)^s,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \ldots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \ldots + \frac{M_s x + N_s}{\left(x^2 + px + q\right)^s}\,,$$

где A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_i, M_1, N_1, M_2, M_2, …, M_s, N_s – некоторые действительные числа.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Для определения коэффициентов разложения используется *метод неопределенных коэффициентов:*

– раскладывается правильная рациональная дробь на простейшие дроби;

– простейшие дроби приводятся к общему знаменателю $Q_m(x)$;

– многочлен, получившийся в числителе, приравнивается к многочлену $P_n(x)$;

– приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества. В результате получается система m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_k, M_1, N_1, …, M_s, N_s.

Если корни знаменателя рациональной дроби $Q_m(x)$ просты и действительны, вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты переменной x даются несколько частных значений (последовательно полагают x равным каждому из корней знаменателя).

Всякая рациональная функция $R(x)$ представима в виде суммы многочлена $T_k(x)$ (целой части) и правильной рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$:

$$R(x) = T_k(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ k,\ n,\ m \in \mathbb{N}$$

Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Тема 4 Интегрирование иррациональностей

4.1 Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \dots\right)dx$

4.2 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

4.3 Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$

4.4 Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

В интегралах $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right)dx$ (m_i, n_i $\in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots$) подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования x и радикалов $\sqrt[n_i]{x^{m_i}}$, $i = 1, 2, \dots$. Через $R(u, v, w, \dots)$ обозначается *рациональная функция* относительно переменных $u, v, w, \dots$, т. е. выражение, которое получено из величин $u, v, w, \dots$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий. Для вычисления интегралов вводится замена

$$x = t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = r_1$, $\frac{m_2}{n_2} = r_2$, … являются целыми числами, и имеет место интеграл от рациональной функции переменной t:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right) dx = \int R\left(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, \ldots\right) s\, t^{s-1} dt .$$

Интегралы $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots \right) dx$ вычисляются с помощью замены

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, ….

В результате получается интеграл от рациональной функции переменной t.

В общем случае интегралы $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c} \right) dx$ сводятся к интегралам от рациональных функций подстановками Эйлера:

– если дискриминант трехчлена ax^2+bx+c отрицательный, то используется первая подстановка Эйлера

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a} ;$$

– если дискриминант трехчлена ax^2+bx+c положительный и $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, то используется вторая подстановка Эйлера

$$t = \pm\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1} .$$

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому в некоторых случаях удобнее применять другие методы интегрирования.

Для вычисления интеграла $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ выделяется полный квадрат под знаком радикала:

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right)\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)$$

и применяется замена $x+\frac{b}{2a}=u$, $dx = du$.

Для вычисления интеграла $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в числителе выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала. Тогда интеграл I_2 представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1 =$$

$$= \frac{A}{2a}\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

Вычисление интеграла $I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к вычислению интеграла I_1 заменой: $x=\frac{1}{u}$, $dx=-x=\frac{1}{u^2}du$.

При вычислении интеграла $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ с помощью тригонометрических подстановок квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной представляется в виде $u^2 \pm k^2$. В результате исходный интеграл приводится к одному из следующих интегралов:

$$I_4 = \int R\left(u, \sqrt{k^2-u^2}\right)du\ ,\ I_5 = \int R\left(u, \sqrt{k^2+u^2}\right)du\ ,$$

$$I_6 = \int R\left(u, \sqrt{u^2 - k^2}\right) du \; .$$

Интеграл $I_4 = \int R\left(u, \sqrt{k^2 - u^2}\right) du$ заменой $u = k \sin t$ (или $u = k \cos t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_5 = \int R\left(u, \sqrt{k^2 + u^2}\right) du$ заменой $u = k \operatorname{tg} t$ (или $u = k \operatorname{ctg} t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_6 = \int R\left(u, \sqrt{u^2 - k^2}\right) du$ заменой $u = k \sec t$ (или $u = k \operatorname{cosec} t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интегралы вида

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx \;\; (m, n, p \in \square \; , \; a \, , \; b \in \square \;). \, , \; a \, , \; b \in \square \;)$$

называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m \left(a + bx^n\right)^p$. Эти интегралы выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

– если $p \in \square$, то используется подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

– если $\dfrac{m+1}{n} \in \square$, то используется подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \dfrac{k}{s}$;

– если $\dfrac{m+1}{n} + p \in \square$, то используется подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \dfrac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях, как было показано П. Л. Чебышевым, интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

Известно, что любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, т. е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x)=f(x)$. Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций. Ниже приводятся примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции:

$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2}dx$ *– интеграл Пуассона,*

$Si(x)=\int\frac{\sin x}{x}dx$ *– интегральный синус,*

$\int\frac{\cos x}{x}dx$ *– интегральный косинус,*

$li(x)=\int\frac{dx}{\ln x}$ *– интегральный логарифм,*

$\int\cos\left(x^2\right)dx$, $\int\sin\left(x^2\right)dx$ *– интегралы Френеля,*

$\int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ *– эллиптический интеграл первого рода,*

$\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$ *– эллиптический интеграл второго рода.*

Каждый из приведенных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.

Тема 5 Интегрирование трансцендентных функций

5.1 Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$

5.2 Интегралы вида $\int\sin^n x\cos^m x dx$, $\int\mathrm{tg}^n x dx$, $\int\mathrm{ctg}^n x dx$

5.3 Интегралы вида $\int\sin mx\cos nx dx$, $\int\cos mx\cos nx dx$, $\int\sin mx\sin nx dx$

5.4 Интегралы вида $\int R\left(e^x\right)dx$, $\int R(\mathrm{sh}\,x,\mathrm{ch}\,x)dx$

Вычислить интегралы $\int R(\sin x,\cos x)dx$ можно различными методами: преобразованием подынтегрального выражения с помощью тригонометрических формул, применением методов замены переменной или интегрирования по частям.

Существует общая универсальная схема вычисления таких интегралов, основанная на универсальной тригонометрической подстановке $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Этой подстановкой интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t, который всегда выражается в элементарных функциях. Функции $\sin x$, $\cos x$ и дифференциал dx выражаются через t по формулам:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\, t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

С помощью универсальной подстановки удобно вычислять интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}.$$

Хотя универсальная подстановка всегда позволяет вычислить интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, однако ее используют сравнительно редко, так как она часто приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Поэтому в ряде случаев более удобно использовать частные подстановки.

Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\sin x$:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $\cos x = t$.

Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то используют подстановку $\sin x = t$.

Если подынтегральная функция *четна* относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $\mathrm{tg}\, x = t$.

Если в интеграле $\int \sin^n x \cos^m x dx$, m, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если m, $n \in \square$, то подстановками $t=\sin x$ или $t=\cos x$ интеграл $\int \sin^n x \cos^m x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$, $n \in \square$, $n>1$, вычисляются подстановками $\mathrm{tg}\, x = t$ и $\mathrm{ctg}\, x = t$ соответственно.

Если $t = \mathrm{tg}\, x$, то $x = \mathrm{arctg}\, t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int \mathrm{tg}^n x dx = \int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

Последний интеграл при $n \geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется по правилу интегрирования рациональных дробей.

Аналогично если

$$t = \mathrm{ctg}\, x, \text{ то } x = \mathrm{arcctg}\, t,\ dx = -\frac{dx}{1+t^2},$$

поэтому

$$\int \mathrm{ctg}^n x dx = -\int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $m,n \in \square$, вычисляются путем разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right),\ m,n \in \square$$

и сводятся к табличным.

Интегралы вида $\int R(e^x)dx$ сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $t = e^x$. При этом $x = \ln t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$.

Интегралы $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$ всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$. В этом случае

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Интегралы вида $\int \operatorname{ch}^n x \operatorname{sh}^m x dx$ ($m \geq 0$, $n \geq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$) в случае, если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1+\operatorname{ch} 2x}{2},\ \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2},\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x.$$

Если m, $n \in \mathbb{Q}$, то подстановками $t = \operatorname{sh} x$ или $t = \operatorname{ch} x$ интеграл $\int \operatorname{ch}^n x \operatorname{sh}^m x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Тема 6 Определенный интеграл и формула Ньютона-Лейбница

6.1 Определение интеграла Римана
6.2 Критерий интегрируемости Дарбу
6.3 Основные свойства определенного интеграла
6.4 Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. И пусть τ_n – разбиение отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$, точками $x_0, x_1, ..., x_n$ (рисунок 4.

2): $a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$. На каждом частичном отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму:

$$\sigma_n(f;\xi_k) = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Сумма $\sigma_n(f;\xi_k)$ называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k = \overline{1,n}$.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ_n, называемая *диаметром разбиения* $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$.

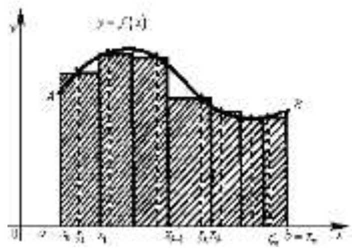


Рисунок 4. 2 – Определение интеграла Римана

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$ (или *интегрируемой по Риману*), если существует конечный предел при $\lambda \to 0$ интегральной суммы $\sigma_n(f;\xi_k)$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I .$$

Число I называется *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования,* a и b – соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Класс всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$, обозначается $\mathrm{R}_{[a;b]}$.

Определение интеграла Римана на языке ε - δ формулируется следующим образом.

Число I называется *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каково бы ни было разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda < \delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k, $k = \overline{1,n}$, выполняется неравенство

$$\left|\sigma_n(f;\xi_k) - I\right| < \varepsilon .$$

Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т. е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy .$$

Обозначение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ похоже на обозначение неопределенного интеграла от той же функции $\int f(x)dx$. Вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла от той же подынтегральной функции. Однако между определенным и неопределенным интегралами имеется существенное различие: *определенный интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ есть некоторое число, в то время как *неопределенный интеграл* представляет собой множество всех первообразных функций $F(x)+C$ данной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Теорема (необходимое условие интегрируемости) Если $\int_a^b f(x)dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. Для произвольного разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ обозначим

$m_k = \inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$ и $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$.

Нижней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма $s_n(f;\xi_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$.

Верхней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма $S_n(f;\xi_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$.

Если функция $f(x)$ ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани конечны. Тогда суммы Дарбу $s_n(f;\xi_k)$ и $S_n(f;\xi_k)$ при любом разбиении τ_n принимают конечные значения.

Нижним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I_* грань возможных ее нижних сумм Дарбу $s_n(f;\xi_k)$:

$$I_* = \sup_{\xi_1;\xi_2;...;\xi_n} s_n(f;\xi_k).$$

Верхним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I^* грань возможных ее верхних сумм Дарбу $S_n(f;\xi_k)$:

$$I^* = \inf_{\xi_1;\xi_2;...;\xi_n} S_n(f;\xi_k).$$

Очевидно, что $I_* \le I^*$.

Теорема (Критерий Дарбу) Для того чтобы функция $y = f(x)$, ограниченная на отрезке $[a;b]$, была интегрируема по Риману на нем, необходимо и достаточно, чтобы суммы Дарбу удовлетворяли условию

$$\lim_{\lambda \to 0} (S_n - s_n) = 0 .$$

Следствия. 1 Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \Delta x_k = 0 ,$$

где $\omega_k(f) = \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$ – колебание функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n , $k = \overline{1,n}$.

2 Если функция $y = f(x)$ была интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и $s_n(f;\xi_k)$, $S_n(f;\xi_k)$ – ее суммы Дарбу, то

$$\lim_{\lambda\to 0} s_n = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \int_a^b f(x)dx .$$

Теорема (об интегрируемости непрерывной функции) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема (об интегрируемости монотонной функции) Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

– если нижний и верхний пределы интегрирования равны $(a = b)$, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 ;$$

– если $f(x) = 1$, то $\int_a^b dx = b - a$;

– при перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx ;$$

– постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathbb{R} ;$$

– определенный интеграл от суммы (разности) конечного числа интегрируемых на $[a;b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ равен сумме (разности) определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx ;$$

– *(аддитивность)* если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и

$\int_c^b f(x)dx$, то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \ a \le c \le b.$$

Геометрический смысл свойства аддитивности состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$ (рисунок 4. 3);

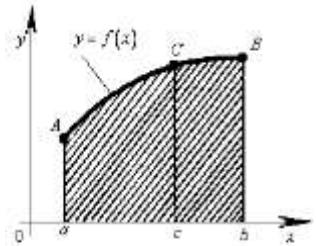


Рисунок 4. 3 – Геометрический смысл свойства аддитивности

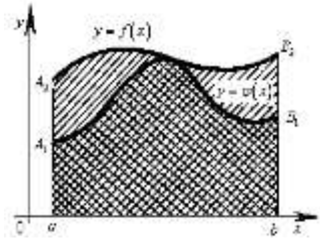


Рисунок 4. 4– Геометрический смысл свойства монотонности

– *(интегрирование неравенств)* если $f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0, \ a < b;$$

– *(монотонность)* если интегрируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \ge \varphi(x) \ \ \forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx, \ a < b.$$

Геометрическая интерпретация данного свойства: площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b (рисунок 4. 4);

– если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то и функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx;$$

– *(оценка интеграла)* если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a);$$

Геометрический смысл заключается в том, что площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника aA_2B_2b равна $M(b-a)$, а площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго (рисунок 4. 4).

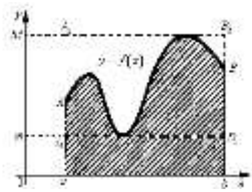


Рисунок 4. 5 – Геометрический смысл оценки

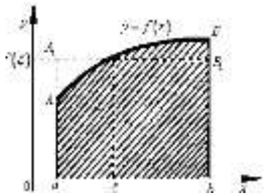


Рисунок 4. 6 – Геометрический свойства о среднем значении

– *(о средне значении)* если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Число $f(\xi)$, называется *интегральным средним значением функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$.

Геометрически данное свойство означает, что существует такая точка $\xi \in [a;b]$, для которой площадь прямоугольника aA_1B_1b равна площади криволинейной трапеции $aABb$ (рисунок 4. 6).

Пусть в определенном интеграле нижний предел интегрирования a остается постоянным, а верхний x изменяется так, что $x \in [a;b]$. Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt = F(x), \ x \in [a;b],$$

называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом* и является функцией верхнего предела x.

С *геометрической* точки зрения, функция $F(x)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции $aACx$ (рисунок 4. 7).

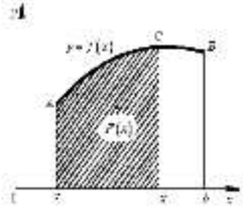


Рисунок 4. 7 – Геометрический смысл интеграла
с переменным верхним пределом

Интеграл вида

$$\int_x^b f(t)dt = G(x), \ x \in [a;b],$$

называется *определенным интегралом с переменным нижним пределом* и является функцией нижнего предела x.

Теорема (непрерывность интеграла с переменным верхним пределом) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны на $[a;b]$.

Теорема (дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и непрерывна в точке $x \in [a;b]$, то функции $F(x)$, $G(x)$ дифференцируемы в этой точке и

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x), \qquad G'(x) = \left(\int_x^b f(t)dt \right)'_x = -f(x).$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a;b]$. Тогда на этом отрезке у нее существует первообразная. При этом для любой точки $x \in [a;b]$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных функций $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ представляет собой неопределенный интеграл:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int f(x)\,dx + C\ .$$

Таким образом, установлена связь между неопределенным и определенным интегралами.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – какая-нибудь первообразная на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Она также записывается в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b\ .$$

Формула Ньютона – Лейбница позволяет избавиться от вычисления определенных интегралов как пределов интегральных сумм, что позволяет вычисление определенного интеграла свести к вычислению неопределенного интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1;t_2]$, причем $\varphi([t_1;t_2]) = [a;b]$ и $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, то справедлива формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt\ .$$

При вычислении интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения изменяются соответственно и пределы интегрирования.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$, $v'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u\,v'\,dx = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,u'\,dx\ .$$

Тема 7 Геометрические приложения определенного интеграла

7.1 Площадь криволинейной трапеции
7.2 Длина дуги плоской кривой
7.3 Площадь поверхности вращения
7.4 Объем пространственного тела

Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дуга AB – график этой функции, заключенный между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рисунок 4.8).

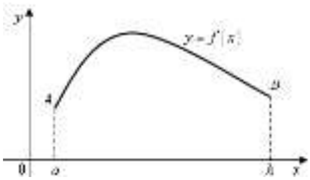


Рисунок 4. 8 – Дуга AB

Кривая $y = f(x)$ называется *спрямляемой*, если $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то длина l дуги AB, вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx\ .$$

Площадь криволинейной трапеции в декартовой системе координат. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции $\{(x;y) \mid a \le x \le b;\ 0 \le y \le f(x)\}$ (рисунок 4. 9) вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

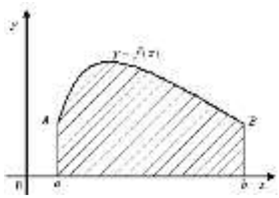


Рисунок 4. 9 –Криволинейная трапеция *aABb*

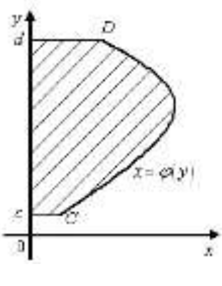
Если $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то и $\int_a^b f(x)dx \le 0$, $a < b$. Следовательно, площадь вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b ydx.$$

Если же криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, осью ординат Oy и прямыми $y = c$, $y = d$ (рисунок 4.10), то ее площадь определяется формулами:

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d xdy \text{, если } \varphi(y) \ge 0 \quad \forall y \in [c;d],$$

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)dy \right| = -\int_c^d xdy \text{, если } \varphi(y) \le 0 \quad \forall y \in [c;d],$$



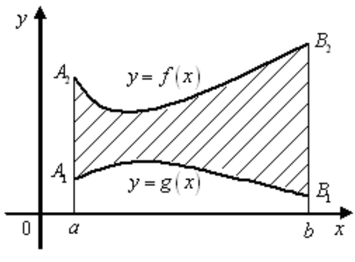


Рисунок 4.10 – Криволинейная трапеция для функции $x=\varphi(y)$

Рисунок 4.11 – Криволинейная трапеция: $g(x)\le y\le f(x)$, $a\le x\le b$

Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$, то эту площадь рассматривают как разность площадей двух криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b (рисунок 4.11). В этом случае можно воспользоваться одной из формул:

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx, \text{ если } f(x)\ge g(x)\ \ \forall x\in[a;b],$$

$$S=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx, \text{ если } g(x)\ge f(x)\ \ \forall x\in[a;b].$$

П л о щ а д ь   п о в е р х н о с т и   в р а щ е н и я   в   д е к а р т о в о й   с и с т е м е   к о о р д и н а т. Пусть функция $f(x)$ не отрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$ на отрезке $[a;b]$, графиком которой является дуга AB. Тогда поверхность, образованная вращением дуги AB вокруг оси Ox, имеет площадь S, которая может быть вычислена по формуле:

$$S_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx;$$

Для параметрического и полярного задания дуги AB соответствующие формулы приводятся в таблице 4.1.

Таблица 4. 1 – Формулы для вычисления длины дуги, площади криволинейной трапеции и площади поверхности вращения

Параметрическое задание $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha;\beta]$	Полярное задание $r=r(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta]$
Длина дуги	
$\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt$	$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi$
Площадь криволинейной трапеции	
$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$	$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

Площадь поверхности вращения	
$S_x = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$, $y(t)\geq 0$	$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$

Объем пространственного тела с известным поперечным сечениям. Пусть дано тело T, ограниченное замкнутой поверхностью. И пусть известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс (рисунок 4.12). Эти сечения называются *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox. С изменением x площадь S поперечного сечения изменяется, т. е. является некоторой функцией $S(x)$.

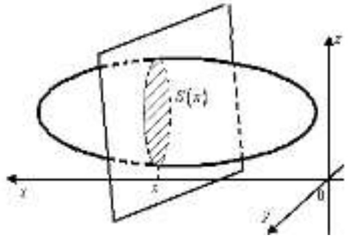


Рисунок 4.12 – Пространственное тело с поперечным сечением $S(x)$

Пусть функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, где a и b – абсциссы крайних сечений тела T. Объем тела, заключенного между двумя плоскостями $x=a$ и $x=b$, с площадью $S=S(x)$ поперечного сечения вычисляется по формуле:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Вычисление объемов тел вращения. Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$ (рисунок 4. 13).

Если пересечь это тело плоскостями, перпендикулярными к оси Ox, получим круги, радиусы которых равны модулю ординат $y=f(x)$ точек данной кривой. Следовательно, площадь сечения рассматриваемого тела равна $S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$.

Применяя формулу $V=\int_a^b S(x)dx$, получаем формулу для вычисления объема тела вращения

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b (f(x))^2dx.$$

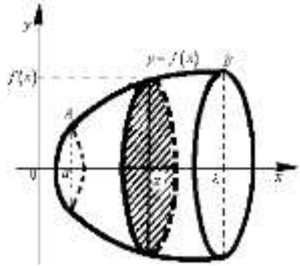


Рисунок 4.13 – Тело, образованное вращением $aABb$ вокруг оси $0x$

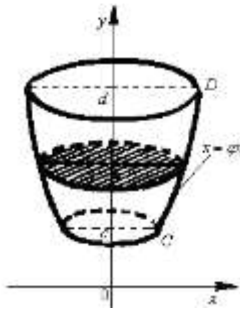


Рисунок 4.14 – Тело, образованное вращением $cCDd$ вокруг оси $0y$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$ (рисунок 4.14), то его объем вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d (\varphi(y))^2dy,$$

где $x=\varphi(y)$, $c\le y\le d$, – уравнение кривой CD.

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi\,d\varphi.$$

Тема 8 Физические приложения определенного интеграла

8.1 Работа переменной силы

8.2 Работа электродвигателя переменной мощности

8.3 Сила давления жидкости

8.4 Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс

Работа переменной силы. Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы $\vec{F}$. За ось Ox примем прямую, вдоль которой движется материальная точка. Пусть начальная и конечная точки пути имеют абсциссы a и b ($a<b$) соответственно. В каждой точке отрезка $[a;b]$ модуль силы принимает определенное значение и является некоторой функцией абсциссы, т. е $\left|\vec{F}\right| = F(x)$. Будем считать функцию $F(x)$ непрерывной. Тогда работа A переменной силы на прямолинейном пути от a до b задается формулой:

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Работа электродвигателя переменной мощности. Пусть мощность электродвигателя в момент времени t равна $N(t)$. Работа A, совершаемая двигателем за промежуток времени $[a;b]$ выражается формулой:

$$A = \int_a^b N(t)dt.$$

Сила давления жидкости. Пусть пластинка, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость таким образом, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня на расстояниях a и b соответственно (рисунок 4. 15).

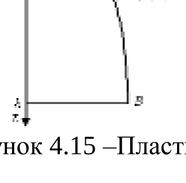


Рисунок 4.15 –Пластинка

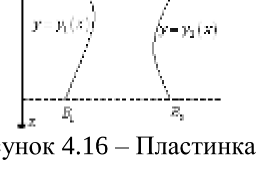


Рисунок 4.16 – Пластинка

$aABb$, погруженная вертикально в жидкость

$A_1B_1B_2A_2$, погруженная вертикально в жидкость

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давлений P жидкости на эту пластинку будет равна весу столба жидкости, основанием которого является данная пластинка, а высотой – глубина h: $P = g\,\rho h S$, где $g = 9{,}8$ м/с^2; ρ – плотность жидкости, S – площадь пластинки.

Если же пластинка погружена в жидкость вертикально, то давление жидкости – сила давления на единицу площади – изменяется с глубиной погружения. По закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково по всем направлениям, в том числе и на вертикальную пластинку.

Выберем систему координат так, как показано на рисунке 4.15. Пусть уравнение кривой AB имеет вид $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Сила давления жидкости на всю пластинку определяется интегралом:

$$P = g\int_a^b \rho\, x\, f(x)\,dx\,.$$

Если в жидкость вертикально погружена пластинка $A_1B_1B_2A_2$ (рисунок 4.16), ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, то сила давления на эту пластинку вычисляется по формуле:

$$P = g\int_a^b \rho x(y_2 - y_1)dx\,.$$

Статические моменты, моменты инерции и координаты центра. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. *Статическим моментом* материальной точки $A(x;y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и расстояния до оси Ox (оси Oy): $M_x = my$ ($M_y = mx$).

Моментом инерции материальной точки $A(x;y)$ в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy, точки O)

называется величина, численно равная произведению массы этой точки и квадрата расстояния до оси Ox (оси Oy, точки O):

$$I_x = my^2,\ I_y = mx^2,\ I_0 = I_x + I_y = m\left(x^2 + y^2\right).$$

Если дана система материальных точек $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, …, $A_n(x_n; y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n, то статические моменты находятся по формулам:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,$$

а моменты инерции – по формулам:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2,\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2,\ I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 + y_k^2\right) m_k.$$

Центром масс системы материальных точек называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ системы, то статический момент этой точки относительно любой ее оси равен статическому моменту данной системы материальных точек относительно той же оси.

Поэтому, обозначая центр масс системы $C(x_C; y_C)$, получаем:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = My_C, \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = Mx_C.$$

Таким образом, координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\ y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

Линия (фигура) называется *однородной*, если $\rho = \text{const}$ на всей линии (фигуре). Если при этом $\rho = 1$, то масса линии (фигуры) численно равна длине линии (площади фигуры).

Пусть на спрямляемой кривой AB, заданной уравнением $y = f(x)$, распределена масса с плотностью $\rho = \rho(x)$ (рисунок 4.17). По следующим формулам вычисляются:

масса кривой: $M=\int\limits_a^b \rho\sqrt{1+(y')^2}\,dx$;

статические моменты кривой относительно осей Ox, Oy :

$$M_x=\int\limits_a^b \rho y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ M_y=\int\limits_a^b \rho x\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$$

координаты центра масс: $x_C=\dfrac{M_y}{M}$, $y_C=\dfrac{M_x}{M}$;

моменты инерции относительно осей Ox, Oy *и начала координат* $O(0,0)$:

$$I_x=\int\limits_a^b \rho y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ I_y=\int\limits_a^b \rho x^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ I_0=I_x+I_y.$$

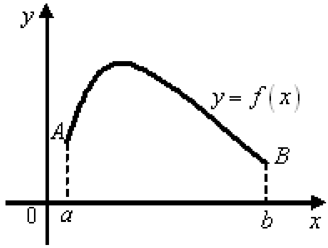


Рисунок 4. 17 – Кривая AB

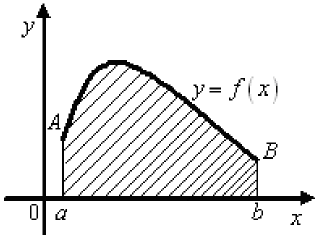


Рисунок 4. 18 – Криволинейная трапеция $aABb$

Для параметрического и полярного задания плоской линии AB соответствующие формулы приводятся в таблице 4. 2.

Таблица 4. 2 – Формулы для вычисления массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской линии

Параметрическое задание $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha;\beta]$	Полярное задание $r=r(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta]$
Масса	
$M=\int\limits_\alpha^\beta \rho\big(x(t)\big)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$	$M=\int\limits_\alpha^\beta \rho\big(r(\varphi)\cos\varphi\big)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$
Статические моменты	
$M_x=\int\limits_\alpha^\beta \rho\big(x(t)\big)y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$,	$M_x=\int\limits_\alpha^\beta \rho\, r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$,

$M_y=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho\big(x(t)\big)x(t)\sqrt{x'^2+y'^2}dt$	$M_y=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$, $\rho=\rho\big(r(\varphi)\cos\varphi\big)$
Моменты инерции	
$I_x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho\big(x(t)\big)y^2(t)\sqrt{x'^2+y'^2}dt$, $I_y=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho\big(x(t)\big)x^2(t)\sqrt{x'^2+y'^2}dt$, $I_0=I_x+I_y$	$I_x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho r^2(\varphi)\sin^2\varphi\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$, $I_y=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho r^2(\varphi)\cos^2\varphi\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$, $\rho=\rho\big(r(\varphi)\cos\varphi\big)$

Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры. Пусть дана материальная криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная графиком функции $y=f(x)\geq 0$, $x\in[a;b]$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$ (рисунок 4.18). И пусть на фигуре распределена масса с плотностью $\rho=\rho(x)$. По следующим формулам вычисляются:

масса фигуры: $M=\int\limits_a^b\rho\, ydx$;

статические моменты относительно осей координат:

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b\rho\, y^2dx,\ M_y=\int\limits_a^b\rho\, x\, ydx;$$

моменты инерции относительно осей Ox, Oy:

$$I_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b\rho y^3dx,\ I_y=\int\limits_a^b\rho x^2ydx;$$

координаты центра масс: $x_C=\dfrac{M_y}{M}$, $y_C=\dfrac{M_x}{M}$.

Для параметрического и полярного задания плоской фигуры соответствующие формулы приводятся в таблице 4.3.

Для нахождения центра тяжести плоской фигуры, имеющей сложную форму, разбивают фигуру на простейшие фигуры, координаты центра масс которых либо известны, либо достаточно легко определяются. При этом сложную фигуру D представляют в виде объединения простейших фигур, из которых вырезаны некоторые фигуры. Эти фигуры (вырезанные) обозначим через D_1, D_2, …, D_n, а их площади – S_1, S_2, …, S_n. Тогда координаты центра масс фигуры D можно найти по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)x_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)y_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)},$$

где x_{C_k} y_{C_k} – координаты центра масс фигуры D_k; S_k – площадь фигуры D_k, $k=\overline{1,n}$. В этих формулах площадь фигуры берется со знаком «+», если $D_k \subset D$, и со знаком «–», если $D_k \not\subset D$, т.е. если элементарная фигура D_k вырезана. При нахождении координат центра масс используется также свойство симметрии фигуры: если фигура имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

Таблица 4. 3 – Формулы для вычисления массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской фигуры

Параметрическое задание $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha;\beta]$	Полярное задание $r=r(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta]$
Масса	
$M=\int_{\alpha}^{\beta}\rho\big(x(t)\big)y(t)x'(t)dt$	$M=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho\big(r(\varphi)\cos\varphi\big)r^2(\varphi)d\varphi$
Статические моменты	
$M_x=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho\big(x(t)\big)y^2(t)x'(t)dt$, $M_y=\int_{\alpha}^{\beta}\rho\big(x(t)\big)x(t)x'(t)dt$	$M_x=\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$, $M_y=\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho r^3(\varphi)\cos\varphi d\varphi$, $\rho=\rho\big(r(\varphi)\cos\varphi\big)$
Моменты инерции	
$I_x=\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho\big(x(t)\big)y^3(t)x'(t)dt$,	$I_x=\frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta}\rho r^4(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$,

$I_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho\left(x(t)\right) x^2(t) y(t) x'(t) dt$,	$I_y = \frac{1}{4}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho r^4(\varphi)\cos^2\varphi d\varphi$, $\rho = \rho\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)$

Тема 9 Несобственные интегралы

9.1 Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования
9.2 Несобственный интеграл от неограниченных функций
9.3 Формулы для несобственных интегралов
9.4 Признаки сходимости несобственных интегралов

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось, что пределы интегрирования a и b являются конечными и подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. В этом случае определенные интегралы называются *собственными*.

Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интегралы называются *несобственными*. При этом определение интеграла Римана теряет смысл. Действительно, в случае бесконечного отрезка интегрирования его нельзя разбить на n частичных отрезков конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для функции $f(x)$ непрерывной на $[a;b]$, существует определен-

ный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, зависящий от верхнего предела b.

Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной на промежутке $[a;\infty)$ функции $f(x)$ называется предел $b \to +\infty$:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*, если этот предел не существует или равен ∞, то *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ называется интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,\ c \in (-\infty;\infty),$$

то по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

Этот несобственный интеграл называется *сходящимся*, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется *расходящимся*.

Интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называются также *несобственными интегралами первого рода*.

<u>*С геометрической*</u> точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $y=0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Ox, имеет конечную площадь S (рисунок 4.19).

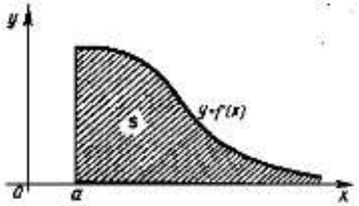


Рисунок 4. 19 – Геометрический смысл несобственного интеграла 1-го рода

Интегралом в смысле главного значения называется интеграл:

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-b}^{+b} f(x)dx,\ b>0.$$

Очевидно, что, если существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, то и существует интеграл в смысле главного значения. Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения может существовать, а соответствующий ему несобственный интеграл – нет.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограничена в левосторонней окрестности точки b (b – точка бесконечного разрыва), т. е. $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$. Будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется при $\varepsilon\to 0$ предел:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon > 0.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $(a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,\ \varepsilon > 0.$$

Если же функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то интеграл необходимо представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Если пределы в правых частях формул существуют и конечны, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ является *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Несобственные интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами второго рода*.

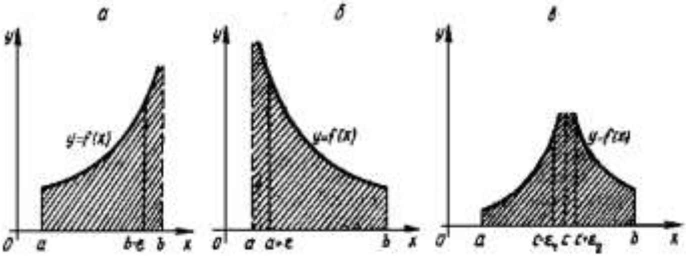


Рисунок 4. 20 – Геометрический смысл несобственного интеграла
от неограниченных функций

С *геометрической* точки зрения сходящийся несобственный интеграл 2-го рода означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ $x = b$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Oy при $x \to b - 0$ (рисунок 4.20, а), ($x \to a + 0$, рисунок 4.20 , б; $x \to c \pm 0$ рисунок 4.20, в), имеет конечную площадь S .

В силу свойств предела функции и определения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, многие свойства определенного интеграла предельным переходом переносятся на несобственные интегралы.

Не ограничивая общности, ниже приводятся свойства несобственного интеграла от функции, определенной на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$:

– *(формула Ньютона-Лейбница*) если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $F(x)$ какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a);$$

– (*линейность*) если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел α и β несобственный интеграл $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx$ также сходится и

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$$

– *(монотонность)* если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и для всех $x \in [a;b)$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

– *(замена переменной)* если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференциру-

ема на промежутке $[\alpha;\beta)$, $-\infty<\alpha<\beta\le+\infty$, и выполняются условия $\varphi([\alpha;\beta))=[a;b)$, $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

– *(интегрирование по частям)* пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ кусочно-непрерывны на любом отрезке $[a;\eta]$, $a\le\eta<b$. Тогда

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu .$$

Будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta)$, $a\le\eta<b$ (несобственный интеграл 1-го или 2-го рода).

Теорема (признак сравнения) Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a\le\eta<b$, причем $\forall x\in[a;b)$ справедливо $0\le f(x)\le g(x)$. Тогда

1) из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, 2) из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Следствие (предельный признак сравнения) Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a\le\eta<b$, причем $\forall x\in[a;b)$ $g(x)\ne0$, и существует конечный предел

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=A>0.$$

Тогда 1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *сходится и* $0 \le A < +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится,2) если интеграл* $\int_a^b g(x)dx$ *расходится и* $0 < A \le +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *расходится,3) если* $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, *то интегралы* $\int_a^b g(x)dx$ *и* $\int_a^b f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла) Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η, *что для всех* η_1 *и* η_2, *удовлетворяющих условию* $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, *выполняется неравенство* $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$.

Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится. Обратное верно не всегда.

Теорема(признак Дирихле) Пусть на промежутке $[a;b)$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную, и функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. *Тогда интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Теорема (признак Абеля) *Пусть на промежутке $[a;b)$ функция $f(x)$ непрерывна и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.*

Вопросы для самоконтроля

Определения

15 Сформулируйте определение первообразной функции.

16 Сформулируйте определение неопределенного интеграла.

17 Что называется рациональной дробью?

18 Какая рациональная дробь называется простейшей?

19 Какая функция называется интегрируемой на отрезке?

20 Сформулируйте определение интеграла Римана.

21 Дайте определения верхних и нижних сумм Дарбу.

22 Дайте определения верхних и нижних интегралов.

23 Что называется определенным интегралом с переменным верхним пределом?

24 Какой интеграл называется несобственным интегралом первого рода? Когда несобственный интеграл первого рода сходится, расходится?

25 Какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода? Когда несобственный интеграл второго рода сходится, расходится?

Формулировки теорем и формулы

31 Перечислите свойства первообразной.

32 Перечислите свойства неопределенного интеграла.

33 В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

34 Перечислите свойства неопределенного интеграла.

35 Как осуществляется интегрирование с помощью замены переменной?

36 Как осуществляется интегрирование с помощью интегрирования по частям?

37 Какие подынтегральные функции удобно интегрировать по частям?

38 Как интегрируются простейшие рациональные дроби?

39 Какой вид имеет разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей?

40 В чем суть метода неопределенных коэффициентов?

41 Какая замена переменной используется при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$?

42 Какая замена переменной используется при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$?

43 Какие подстановки называются подстановками Эйлера?

44 Для вычисления каких интегралов удобно применять тригонометрические подстановки?

45 В каких случаях можно вычислить интеграл от дифференциального бинома?

46 Приведите примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции.

47 Как вычисляются интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$? Какие возможны частные случаи?

48 Как вычисляются интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$?

49 Какие формулы используются при вычислении интегралов вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$?

50 Какая подстановка применяется при вычислении интегралов вида $\int R\left(e^x\right)dx$?

51 Какие подстановки используются при вычислении интегралов вида $\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)dx$?

52 Сформулируйте необходимое условие интегрируемости по Риману функций.

53 Перечислите основные свойства определенного интеграла.

54 Является ли интеграл с переменным верхним пределом непрерывной функцией?

55 Можно ли дифференцировать интеграл по переменному верхнему пределу? При каких условиях это возможно?

56 Какая формула связывает неопределенный и определенный интегралы?

57 Сформулируйте теорему о замене переменной в определенном интеграле.

58 Сформулируйте теорему об интегрировании по частям в определенном интеграле.

59 По каким формулам вычисляются площади криволинейных трапеций, ограниченных линиями, заданными в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат?

60 Приведите формулы для вычисления длин дуги кривой, заданной в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат.

61 Как вычисляется площадь поверхности тела?

62 Как вычисляется объем пространственных тел?

63 Для решения каких физических задач используется определенный интеграл.

64 Перечислите основные свойства несобственных интегралов.

65 Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

66 Сформулируйте признак сравнения сходимости несобственных интегралов.

67 Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?

68 Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.

Доказательство теорем

1. Сформулируйте и докажите критерий интегрируемости Дарбу.
2. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости непрерывной на отрезке функции.
3. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости на отрезке монотонной функция?
4. Сформулируйте и докажите теорему о среднем определенного интеграла.

Вопросы и задачи на понимание

1 Приведите примеры функций, имеющих и не имеющих первообразных.

2 Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции $f(x)$.

3 Имеет ли функция $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x>0, \\ -2 \text{ при } x\le 0\end{cases}$ первообразную?

4 Найдите первообразную для функции $f(x)=\sin x$, которая в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$ принимает значение, равное 10.

5 Известно, что две первообразные для функции $f(x)=e^x$ в точке $x=1$ отличаются на 2. На сколько отличаются эти же первообразные в точке $x=100$?

6 График какой первообразной для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ проходит через точку с координатами $(1;2\pi)$?

7 Требуется найти $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ для $x\in[-2,2]$. Допустима ли для этой цели замена переменной: а) $x=\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; б) $x=\cos t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; в) $x=2\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; г) $x=2\cos t$; $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; д) $x=2\cos t$, $\pi\le t\le 2\pi$?

***Раздел* 5 Теория рядов**

Тема 1 Ряды с неотрицательными членами

1.1 Определение числового ряда, необходимый признак сходимости

1.2 Простейшие свойства числовых рядов, критерий Коши сходимости ряда

1.3 Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Пусть $(a_n)=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$$

называется *числовым рядом*, числа a_1, a_2, …, a_k, … – членами ряда, а число a_k – k-м или *общим членом* ряда.

Сумма конечного числа n первых членов

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n-й *частичной суммой* данного ряда.

В частности,

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

……………………,

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ и т. д.

Если для последовательности (S_n) частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *сходящимся*, а число S – *суммой* данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ .$$

Если предел последовательности (S_n) не существует или равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

Теорема (необходимое условие сходимости *ч и с л о в о г о   р я д а) Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то предел общего члена равен нулю:* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Выражение вида $a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, представляющее собой числовой ряд, называется n*-м остатком* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и обозначается $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ или $r_n = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n .$$

Для сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ необходимо и достаточно, чтобы любой его остаток r_n сходился.

Очевидно, что если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Следовательно, отбрасывание любого конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0 \ \ \forall\ k \in \mathbb{N}$, называется *рядом с неотрицательными членами*.

Для рядов с неотрицательными членами справедливы следующие свойства:

– перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость);

– если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k + b_k\right)$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k+b_k\right)=S_a+S_b .$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k+b_k\right)$ называется *суммой рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$;

– если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha\cdot a_k$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha\cdot a_k=\alpha\cdot S .$$

Ряд $\alpha\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ называется *произведением ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *на число* α ;

– если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, то и ряд, полученный группировкой его членов без изменения порядка их расположения, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

Теорема (критерий Коши сходимости ряда) Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon)$, *что для всех* $k>N(\varepsilon)$ *и всех* $\forall\, p\in\mathbb{N}$ *имело место неравенство:*

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_{k+p}\right|<\varepsilon .$$

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм $\left(S_n\right)$ этого ряда была ограничена.

Теорема (интегральный признак Коши) Если неотрицательная интегрируемая функция $f(x)$ *на промежутке* $[1;+\infty)$ *монотонно убывает, и члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *имеют вид*

$a_k = f(k)$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости имеет место неравенство:*

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int\limits_1^{\infty} f(x)dx + a_1 .$$

Теорема (признак сравнения) Пусть для членов рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *справедливо неравенство* $0 \le a_k \le b_k$ $\forall k \ge n_0 \in \mathbb{N}$ *. Тогда:*

1) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится,*

2) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

Следствие (предельный признак сравнения) Пусть для членов рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *(*$a_k > 0$*) и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *(*$b_k > 0$*) существует конечный предел:*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = A, \; A \ne 0 .$$

Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Для исследования на сходимость рядов с помощью признаков сравнения используются ряды:

– ряд из элементов геометрической прогрессии*:* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, $(a \ne 0)$, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \ge 1$;

– обобщенный гармонический ряд: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \le 1$.

Теорема (признак Д'аламбера) Пусть для ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *(* $a_k > 0$ *) существует предел* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$. *Тогда при* $L < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $L = 1$.

Теорема (признак Коши) Пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *(* $a_k > 0$ *) существует предел* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$. *Тогда при* $L < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $L = 1$.

Из существования предела $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ следует, что существует и предел $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$. Обратное утверждение не всегда имеет место, т. е. признак Коши «сильнее» признака Д’аламбера.

Тема 2 Знакопеременные ряды

2.1 Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница
2.2 Абсолютно и условно сходящиеся ряды
2.3 Признаки Дирихле и Абеля

Знакочередующимся называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{k-1} a_k + \ldots,$$

где a_k, $k = 1,2,\ldots$, – числа одного знака.

Теорема (признак Лейбница) Пусть члены знакочередующегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *удовлетворяют условиям:*

1) $a_k \geq a_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *;*

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ *сходится, а его сумма* S *не превосходит первого члена, т. е.* $S \le a_1$.

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 1 называется *рядом Лейбница*.

Остаток $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots)$ ряда Лейбница удовлетворяет неравенству $|r_n| \le a_{n+1}$.

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными*.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ сходится.

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Обратное утверждение в общем случае не имеет места.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают *свойствами*:

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sigma$, то $|S| \le \sigma$;

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, то при любых α и β ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\, a_k + \beta\, b_k)$ абсолютно сходится;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, то ряд, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна сумме исходного ряда;

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $a_k b_m$ членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *условно сходящимся*.

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ обозначим через a_1^+, a_2^+, …,a_k^+,… и a_1^-, a_2^-, …, a_k^-, … соответственно его неотрицательные и отрицательные члены, взятые в том же порядке, в котором они расположены в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$, члены которых неотрицательны.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ условно сходится, то оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ расходятся.

Теорема (Римана) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ условно сходится, то, каково бы ни было действительное число s, можно так переставить его члены, что сумма получившегося ряда будет равна s.

Для исследования сходимости знакопеременных рядов часто используются признаки Дирихле и Абеля.

Теорема (признак Дирихле) Пусть

1) последовательность (a_k) монотонна и $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$,

2) последовательность сумм (B_n), $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, ограничена.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Теорема (признак Абеля) Пусть

1) последовательность (a_k) ограничена и монотонна,

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Тема 3 Функциональные ряды

3.1 Сходимость функциональных последовательностей
3.2 Функциональные ряды и их сходимость
3.3 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов
3.4 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Пусть на множестве X задана последовательность функций

$$\left(f_n(x) \right) = \left(f_1(x); f_2(x); f_3(x); \ldots \right),$$

принимающих числовые значения в точках $x \in X$.

Последовательность $\left(f_n(x) \right)$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ во всех точках $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| \le M$:

$$\left(f_n(x) \right) - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall x \in X \quad |f_n(x)| \le M.$$

Последовательность $\left(f_n(x) \right)$ называется *поточечно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\left(f_n(x) \right)$ сходится к $f(x)$, т. е. $\forall x \in X \quad \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$:

$$\forall\ x \in X \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N(\varepsilon) :\ \forall\ n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поточечная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty$.

Функциональная последовательность $\left(f_n(x) \right)$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех точек $x \in X$ имеет место неравенство $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N(\varepsilon) \colon \forall\ n > N(\varepsilon)$ и $\forall\ x \in X\ \Rightarrow\ \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ n \to \infty$.

Для того чтобы последовательность функций $\left(f_n(x) \right)$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{X} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0$.

Обозначим $r_n = \sup\limits_{X} \left| f_n(x) - f(x) \right|$.

Тогда последовательность $\left(r_n \right) = \left(\sup\limits_{X} \left| f_n(x) - f(x) \right| \right)$ является числовой последовательностью.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости последовательности. Для того чтобы последовательность функций $\left(f_n(x) \right)$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех точек $x \in X$, всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \colon \forall\ x \in X,\ \forall\ n > N(\varepsilon)\ \forall\ p \in \mathbb{N}\ \ \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$.

Пусть $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$ – последовательность функций, определенных на некотором множестве X .

Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

членами которого являются функции $u_k(x)$, называется *функциональным*.

Каждому значению $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится, то x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*. Обозначим ее через D. Очевидно, что $D \subseteq X$. Если множество D пусто, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ расходится в каждой точке множества X .

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ конечная сумма $\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ называется n*-й частичной суммой* и обозначается $S_n(x)$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x)$ называется n*-м остатком* и обозначается $r_n(x)$.

П о т о ч е ч н а я с х о д и м о с т ь ф у н к ц и о н а л ь н ы х р я д о в . Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *сходящимся поточечно* к функции $S(x)$ на множестве X , если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$ сходится к $S(x)$ на X , т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \iff \forall\, x \in X \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Функция $S(x)$ называется *суммой* ряда.

Очевидно, что для поточечно сходящегося на множестве X ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ его остаток $r_n(x)$ удовлетворяет соотношению:

$$\forall x \in X \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 .$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *абсолютно сходящимся* на множестве $D_1 \subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k(x)\right|$.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его сходимость, то $D_1 \subset D$, где D – область сходимости функционального ряда.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда используются признаки Коши и Д'аламбера, для которых в рассматриваемом случае предел L, вообще говоря, будет функцией переменной x.

Равномерная сходимость функциональных рядов. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $\left(S_n(x)\right)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows S(x) \Leftrightarrow S_n(x) \rightrightarrows S(x) \;\; \forall\; x \in X .$$

Для равномерно сходящегося ряда остаток удовлетворяет соотношению: $r_n(x) \rightrightarrows 0 \;\; \forall\; x \in X$.

Различие определений *поточечной* и *равномерной* сходимостей функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер $N(\varepsilon)$ зависит от ε и $x \in X$, т. е. $N = N(\varepsilon; x)$, а во втором – только от ε, т. е. $N = N(\varepsilon)$. *Поточечн*ая сходимость называется также *неравномерной*.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда) Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что всех $n > N(\varepsilon)$, всех $p \in \mathbf{N}$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство $\left|u_{n+1}(x) + .. + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$.

Теорема (признак Вейерштрасса) Пусть

1) члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$|u_k(x)| \le a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X .$$

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_n \ge 0$*, сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* X .

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, члены которого удовлетворяют неравенствам $|u_k(x)| \le a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$, называется *мажорантным* рядом или *мажорантой* для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, а сам функциональный ряд в этом случае называется *мажорируемым* на множестве X .

Т е о р е м а (п р и з н а к Д и р и х л е) Пусть

1) последовательность функций $(a_n(x))$ *равномерно сходится к нулю на множестве* X *;*

2) $(a_n(x))$ *в каждой точке* $x \in X$ *монотонна;*

3) последовательность частичных сумм $(B_n(x))$, $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$*, ограничена на* X .

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ *равномерно сходится на* X .

Т е о р е м а (п р и з н а к А б е л я). Пусть

1) последовательность функций $(a_n(x))$ *ограничена на множестве* X *и в каждой точке* $x \in X$ *монотонна;*

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ *равномерно сходится на* X .

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ *равномерно сходится на* X .

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают *свойствами*:

– *(непрерывность)* если на множестве X функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма непрерывна на X и возможен предельный переход:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x) \quad \forall x_0 \in X \, ;$$

– *(интегрируемость)* если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, то его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0;x] \subset [a;b]$ и справедливо равенство:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\, dt \, ;$$

причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t) dt$ сходится равномерно на $[a;b]$;

– *(дифференцируемость)* если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a;b]$ членами сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ и справедливо равенство:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) .$$

Тема 4 Степенные ряды

4.1 Определение степенного ряда, теорема Абеля
4.2 Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда
4.3 Свойства сходящихся степенных рядов

Ряд вида:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_k(x - x_0)^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

называется *степенным рядом* по степеням $(x - x_0)$. Здесь a_k, x_0 – заданные действительные числа, x – переменная. Числа a_k называются *коэффициентами* степенного ряда.

При $x_0 = 0$ имеем *степенной ряд по степеням* x*:*

$$a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Поскольку заменой $x - x_0 = \xi$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ можно свести к ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$, то не ограничивая общности можно рассматривать только ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ всегда сходится в точке $x = 0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема (Абеля) Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$*, то он сходится абсолютно в интервале* $-|x_0| < x < |x_0|$ *и сходится равномерно на отрезке* $-q \le x \le q$ *, где* $0 < q < |x_0|$*. Если в точке* $x_1 \neq 0$ *степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится, то он расходится во всех точках* x*, таких, что* $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля вытекает, что если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in (-R; R)$ и расходится для всех $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.

Число $R \ge 0$ называется *радиусом* сходимости степенного ряда

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, если степенной ряд сходится в каждой точке интервала $(-R;R)$ и расходится при $|x| > R$. Интервал $(-R;R)$ называется *интервалом сходимости*.

При $x = \pm R$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если ряд хотя бы в одной точке $x_1 = R$ или $x_2 = -R$ сходится, то эти точки вместе с интервалом сходимости образуют *область сходимости*.

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

Пусть для коэффициентов ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ существует предел $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \neq 0$. Тогда радиус сходимости находится по формуле Коши-Адамара: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$.

Аналогично, если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$, то $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_k}{a_k + 1}\right|$.

Для степенного ряда общего вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ существует $R \in \mathbb{R}$, $R \geq 0$, такое, что данный ряд абсолютно сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Здесь число $R \geq 0$ называют *радиусом сходимости*, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ обладает свойствами:

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то его сумма непрерывна на интервале сходимости $(-R;R)$;

– операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке $[x_0;x]\subset(-R;R)$ степенного ряда не изменяют его радиуса сходимости;

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости;

– степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0;x]$, принадлежащем интервалу сходимости:

Тема 5 Ряд Тейлора

5.1 Разложение функций в степенные ряды
5.2 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена
5.3 Приложения степенных рядов

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0=0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$

и называется *рядом Маклорена*.

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

может быть как равным нулю, так и отличным от него, причем в последнем случае сумма $S(x)$ ряда Тейлора может не совпадать с $f(x)$. Важно определить, когда в формуле

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

допустим знак равенства, т. е. когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен. Если $S(x)=f(x)$ на $(x_0-R;x_0+R)$, то говорят, что функция $f(x)$ *разложима в ряд Тейлора в окрестности точки* x_0.

Частичные суммы ряда Тейлора

$$S_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

представляют собой многочлены Тейлора для $f(x)$ в точке x_0.

Теорема (Тейлора) Пусть

1) функция $f(x)$ имеет в окрестности $U(R;x_0)$ точки x_0 производные любого порядка;

2) $\forall x \in U(R;x_0)$ выполняется условие $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M\frac{k!}{R^n}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Тогда функция $f(x)$ разлагается на множестве $U(R;x_0)$ единственным образом:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots.$$

Следствие 1 Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы остаток в формуле Тейлора стремился к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad \forall x \in (x_0-R;x_0+R).$$

Следствие 2 Если для любых $x \in (x_0-R;x_0+R)$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой M, то ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ сходится к функции $f(x)$ в интервале $|x-x_0|<R$.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots$$

и называется формулой *Маклорена*.

Основные разложения в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-1;1),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{a(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k, \quad x \in (-1;1).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

называется *биномиальным*, так как при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ все коэффициенты данного ряда, начиная с номера $n+1$, обращаются в нуль, и степенной ряд преобразуется в бином Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{n!}x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k .$$

Ряды Тейлора и Маклорена используются при вычислении приближенных значений функций, интегралов, решении дифференциальных уравнений.

Приближенное вычисление значений функций. Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точке x_0 с заданной точностью поступают следующим образом. Функцию $f(x)$ раскладывают в ряд по степеням $x - x_1$ в интервале сходимости, содержащим точку x_0. Точка x_1 – это точка, в которой значения функции и ее производных вычисляются точно. Переменной x придается значение x_0. В полученном числовом ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_0 - x_1)^k$ оставляются только члены, гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число n_0 таких членов ряда определяется из соответствующей оценки либо остатка $R_n(x_0)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора, так как в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

Приближенное вычисление интегралов. Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов.

Интегрирование дифференциальных уравнений. Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решения не удается найти в элементарных функциях.

Вопросы для самоконтроля

Определения

26 Какое выражение называется числовым рядом?

27 Что называется суммой ряда?

28 Какое выражение называется остатком ряда?

29 Какие ряды называются рядами с неотрицательными членами?

30 Какой ряд называется знакочередующимся?

31 Какой ряд называется абсолютно сходящимся?

32 Какой ряд называется условно сходящимся?

33 Какая функциональная последовательность называется ограниченной?

34 Какая функциональная последовательность называется поточечно сходящейся на множестве X ?

35 Дайте определение равномерно сходящейся функциональной

последовательности.

36 Дайте определение функционального ряда, его области сходимости.

37 Сформулируйте определения поточечной и равномерной сходимости функционального ряда.

38 Какой ряд называется степенным?

39 Что называется радиусом сходимости, интервалом сходимости, областью сходимости степенного ряда?

Формулировки теорем и формулы

69 Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.

70 Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

71 Какими свойствами обладают условно сходящиеся ряды?

72 Сформулируйте признак Дирихле.

73 Сформулируйте признак Абеля.

74 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости последовательности.

75 Следует ли из равномерной сходимости ряда поточечная? Верно ли обратное?

76 Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

77 Перечислите свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

78 По каким формулам вычисляется радиус сходимости степенного ряда?

79 Перечислите свойства сходящихся степенных рядов.

80 Какой степенной ряд называется рядом Тейлора для функции $y = f(x)$? Как из него получить ряд Маклорена?

Доказательство теорем

13 Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости ряда.

14 Сформулируйте и докажите интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами.

15 Сформулируйте и докажите признак сравнения сходимости рядов с неотрицательными членами.

16 Сформулируйте и докажите признак Д’аламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.

17 Сформулируйте и докажите признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.

18 Сформулируйте и докажите признак Лейбница.

19 Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

20 Сформулируйте и докажите теорему Абеля о радиусе сходимости степенного ряда.

21 Сформулируйте и докажите теорему Тейлора о разложении функции в ряд Тейлора.

Вопросы и задачи на понимание

17 Приведите примеры двух расходящихся рядов, для которых их сумма является: а) сходящимся рядом, б) расходящимся рядом.

18 Доказать, если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ – сходятся, то сходятся и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k + b_k\right)^2$.